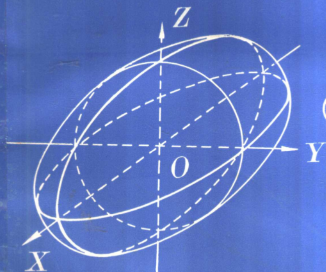
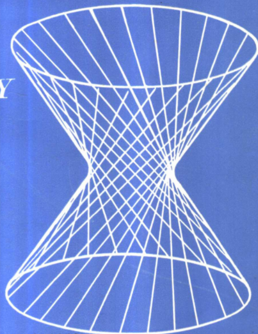
1978年

上海市数学会论文选编

上海市数学会编



$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kP(\xi = k)$$



$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

上海科学技术文献出版社

1978年上海市数学会论文选编
上海市数学会 主编
*
上海科学技术文献出版社出版
(上海高安路六弄一号)
新华书店上海发行所发行
镇 江 印 刷 厂 印 刷
*
开本787×1092 1/16 印张5.75 字数144,000
1980年12月第1版 1980年12月第1次印刷
印数：1-4,100
书号：13192-13 定价：0.75元
《科技新书目》172—134

前　言

上海市数学会于1978年8月27日到8月29日召开了文化大革命后的第一次年会。在会议上共宣读(包括书面报告)论文116篇,其中综合性论文34篇。学会理事长苏步青教授在全体会议上作了题为《计算几何的兴起》的综合性学术报告,颇受与会者注意。美籍华裔数学家伍鸿熙教授也应邀在全体会议上作了深入浅出的有启发性的报告——《几何中的刚性问题》。

通过学术报告和讨论,交流了近几年来,上海数学工作者在纯粹数学、应用数学和计算数学的科学研究以及数学教学方面的大量成果(其中某些成果是相当优秀的)。我们感到基础理论研究和教学在受到"四人帮"严重摧残之后,能够在如此短的时间内,取得这样一些成果是很不容易的。当然目前也还是处于恢复阶段,总的说来我们的论文水平与实现四个现代化对我们的要求,同国际先进水平相比,差距还是很大的,需要我们急起直追。

为了进一步推动数学研究、加强国内数学的学术交流,我们将年会上报告的一小部分论文摘要(共30篇)汇编出版,供国内数学工作者及有关同志参考。如有不当之处,希望广大读者不吝批评指正。

上海市数学会理事会

1979年

目　录

几何外形设计的理论及其应用

复旦大学　苏步青

在计算几何中，插值和逼近的技巧经常被利用到曲线和曲面去。"几何外形"的各性质却不同于函数的性质，我们要求的是一种在所允许的范围内可以接受的贴近拟合，它既保持着曲线或曲面的本性而又是光滑或光顺的。

"光顺"是指拐点不能太多。在有限处拐点个数对于仿射变换是不变的，对于参数的线性变换也是不变的。

下面仅举三次参数样条曲线和曲面的例子和有关的拐点与奇点问题。

如所知，这种曲线适用于大挠度的情况，最初为 S. A. Coons(1967)所使用，后来由 J. H. Ahlberg (1971)、穗祓卫(1969)、椰生孝昭(1974)等人加以扩张。

我们考察三次参数曲线段，方程为

$$(E)\quad \begin{cases} x=a_0+a_1t+\dfrac{1}{2!}a_2t^2+\dfrac{1}{3!}a_3t^3; \\ y=b_0+b_1t+\dfrac{1}{2!}b_2t^2+\dfrac{1}{3!}b_3t^3。\end{cases}$$

对其中 t 可有两种取法：(1) $0\leqslant t\leqslant 1$；(2) $0\leqslant t\leqslant T$，T 表示所讨论曲线段的弦长。

为了检查这个曲线段有没有拐点，我们首先对 (E) 中的参数 t 的取值不加任何限制，从而所考察的不是曲线段而是整根曲线，然后对各种插值曲线段进行拐点的检查。

我们作两向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，它们的向量积是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(p,\ q,\ r)$，从此作

$$I=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\left(\frac{r}{p}\right)。$$

容易证明：I 是曲线(E)的一个内在仿射不变量。还可证明：

当 $I>0$ 时，曲线上有两个实拐点；当 $I=0$ 时，曲线上出现一个尖点；当 $I<0$ 时，曲线上出现一个二重点。曲线的拐点方程是

$$pt^2-2qt+2r=0。$$

假定曲线段在两端点的曲率是同符号，那么第一种参数曲线要使两个实拐点在曲线段上出现的充要条件是：(1)$q^2-2pr>0$；(2)$p,\ q,\ r$ 有同符号；(3)$\dfrac{q}{p}<1$。同样，在第二种情况下的充要条件是：(1)和(2)完全同上，只是(3)$\dfrac{q}{p}<T$。

为了消除曲线有两端点间的一段可能出现的多余拐点，决定两端点的切线长度的正则区域。

为了解决 Bézier 曲线及其拓广的拐点问题，把仿射不变量理论拓广到平面上 n 次有理整曲线去，获得了 $2n-5$ 个相对的仿射不变量。

规范场数学结构的一种表述方式

复旦大学　谷超豪

1．规范场理论起源于电磁场的研究。在考虑带电粒子和电磁场相互作用时，粒子的波函数有位相的不定性（在各点可进行独立的 U_1 群的变换），这种不定性和电磁势的不定性恰好互相抵偿，从而使电磁场理论和 U_1 群联系起来，形成了 U_1 群的规范场理论，并已在高能物理实验中受到了很多检验。1954 年杨振宁和 R. L. Mills 根据中子和质子有近似的对称性这一事实，首先提出了非 Abel 群的规范场理论[1]。最近十余年来，这一理论有很大发展：在弱相互作用方面已经取得了很重要的成就；试用于强子的结构也有一定的进展，并且，引力理论也和规范场关系密切，也在引起人们的注意。在这里叙述一下我们所取得的若干数学结果及某些物理应用。

2．设 M 为 4 维的 Minkowski 空间，G 为李群，规范场一般由规范势形式（取值于 G 的李代数 g 的一次微分形式）

$$b = b_\lambda dx^\lambda = b^a_\lambda(x) X_a dx^\lambda \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ a = 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

所定义，式中 X_a 是 g 的一组基，又

$$F_{\lambda\mu} = b_{\lambda,\mu} - b_{\mu,\lambda} - [b_\lambda,\ b_\mu]$$

称为场的强度，式中逗号表偏导数，方括号为换位运算，势之间可以容许规范变换。

规范场的理论可以由路径位相因子来描述[2]，弧的微分 $x\,x+dx$ 所对应的位相因子为 $I+b$，这里 I 为 G 的恒等元素，b 即为规范势形式。

为了尽可能地消除规范不定性，我们提出了环路位相因子方法[3]，可以把规范场理解为以一定点 O 出发又回到 O 的环路集合到 G 的映照，但须满足同态性和可微分性。为了解释可微分性，我们需要引入一组标准通路 $\{ox\}$，标准微分三角形 $o\,x\,x+dx\,o$ 的位相因子 $I+k$ 可成为规范场理论的出发点。如果再引入 ox 的位相因子 Φ_{ox}，那末我们重新得到了原来意义的规范场。Φ_{ox} 的给定称为给出一个规范。

这个表述方式（以及相应的观点）有相当的应用，例如：

（1）我们证明了：规范场的强度添上规范，就决定了规范场（规范势），可以把规范理解为位相的参考系统的给定。在非 Abel 规范场的情形，强度因参考系统而有不同的解析表示，所以讲到强度需要联系参考系统。从这个观点可以推导出下述结论：场的强度（但要联系规范）仍然是决定非 Abel 规范场的物理量。

（2）既然规范势联系于规范，那就可以把决定规范场方程的拉氏密度函数加以增补，使其保持规范不变性，并能使规范粒子成为有质量的粒子。这样，我们就得到了一个结论：在规范变换不变的理论体系中，规范粒子可以有质量[4]。

这个方法对于研究规范场的等价性，可化约性，时空对称性等[2,5]都有方便之处。

3．在研究磁单极时，空间 M 应除去一些奇点，规范场相应于非平凡的主纤维丛上的联络[6]。又在研究正定欧氏空间中的瞬子解时，由于空间非紧致，不易处理，可用共形变换使之

成为 S^4，丛也成为非平凡的[7]，所以非平凡丛在物理上是有必要考虑的。

我们发现，满足同态性和可微性这两个条件的环路集到 G 的对应，依然是非平凡丛的规范场的一个基本的描述方式。此时规范仍然可以定义作标准路径的位相因子，只是标准路径的构作比较复杂，成立：规范场的强度和若干个环路的位相因子决定了规范场。

从数学上看，上述表述方式的含义是：流形 M 上从 O 环路到 G 的满足同态性和可微性的映照（和乐映照）能同时又唯一（除等价外）决定了以 M 为底的一个 G 主丛和其上的一个联络。

参 考 文 献

[1] Yang, C. N. and Mills, R. L., Phys. Rev. 96 (1954), 161.
[2] Yang, C. N., Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 445.
[3] 谷超豪，《复旦学报》(1976), No. 2, 51；高能物理和核物理，2 (1978), 97.
[4] 谷超豪，有质量的规范粒子(未发表)。
[5] 谷超豪，《复旦学报》(1977), No. 2, 30.
[6] Wu, T. T. and Yang, C. N., Phys. Rev. D12 (1975), 3943.
[7] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977).

线性算子理论的若干问题

复旦大学　夏道行　严绍宗　舒五昌

§1　压缩算子酉扩张和不变子空间理论

(1) C. Foias 和 Sz. Nagy 曾研究 H 中完全非酉压缩算子的不变子空间与算子特征函数的正则分解的关系。在[8]中解除了完全非酉的限制，得到了一般压缩算子的结果。首先，在[8]中证明了任何压缩算子酉等价于下述定理中函数模型，因此只需就函数模型来讨论。

定理　设 $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \mathfrak{K}\}$ 是纯压缩解析函数，$\mathscr{H}$ 是可析 Hilbert 空间，$\mathscr{H}(\cdot)\subset\mathscr{H}$ 是 $([0, 2\pi], \beta, \mu)$ 上强可测投影算子值函数，T 是 $\mathfrak{K}=[H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\oplus\mathscr{H}(\cdot)L^2(\mu, \mathscr{H})]\ominus\{\Theta W\oplus\Delta W\oplus 0\,|\,W\in H^2(\mathfrak{E})\}$ 中的压缩算子，它的共轭算子是

$$T^*(u\oplus V\oplus f)=e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}V(t)\oplus e^{-it}f(t)。$$

设 $\mathfrak{K}_1$ 是 T 的一个不变子空间，则必有压缩解析函数 $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1\}$，$\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2\}$，使 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$。又有强可测投影算子值函数 $Q_3(\cdot)\subset\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{B}(\cdot)\subset\mathscr{H}(\cdot)$，使相应的分解是正则的(定义略)这时若记 $\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{K}_1$ 则 $\mathfrak{K}_j$，$j=1, 2$ 的表达式为：

$$\mathfrak{K}_1=\{\Theta_2u\oplus z^{-1}(\Delta_2u\oplus V)\,|\,u\in H^2(\mathfrak{F}),\ V\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{E})},\ \Theta_1^*u+\Delta_1V\in H^2(\mathfrak{E})\}\oplus\mathscr{A}_1L^2(\mu, \mathscr{H}), \tag{1}$$

$$\mathfrak{K}_2=\{u\oplus z^{-1}(V\oplus 0)\,|\,u\in H^2(\mathfrak{E}_*),\ V\in\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})},\ \Theta_2^*u+\Delta_2V\in H^2(\mathfrak{F})\}\oplus\mathscr{A}_2L^2(\mu, \mathscr{H})。\tag{2}$$

其中 $\mathscr{A}_j(\cdot)$，$j=1, 2$ 是强可测的算子值函数，

$$\mathscr{A}_1(t)\dotplus\mathscr{A}_2(t)=\mathscr{H}(t)-\mathscr{B}(t)-\mathscr{A}_3(t)。$$

反之，如果给出 $\mathscr{A}_3$，$\mathscr{B}$ 及 Θ 的一个正则分解，(1)定义的 $\mathfrak{K}_1$ 必是 T 的不变子空间，而且 $\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{K}_1$ 形如(2)。

(2) 对于交换压缩酉算子族，在[13]中得到如下结果。

定理　设 N_+ 是一个 Gauss 半群，L 是 N_+ 中既约元素全体，M 是 L 中元素一次幂乘积全体，$\mathfrak{K}$ 是 Hilbert 空间。$a\mapsto T(a)$ 是 N_+ 到 $\mathscr{B}(\mathfrak{K})$ 中同态，而且 $T(e)=I$，$\|T(a)\|\leqslant 1$。那末 $T(a)$ 存在酉扩张 $U(a)$，且满足 $T^*(a)T(b)=P_rU(a)^*U(b)$ 的充要条件是对任何含有 e 的有限子集 S 成立着 $\sum\limits_{a\in S}(-1)^{c(a)}T(a)^*T(a)\geqslant 0$。

定理　设 $\{T(t), S(t), t\geqslant 0\}$ 是 $\mathfrak{K}$ 上交换的压缩算子半群，那末它们存在交换的酉扩张的充要条件是对一切 s，$t\geqslant 0$，$T^*(t)$ 与 $S(s)$ 交换

(3) 利用压缩算子，在[8]中得到以下结果

定理　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{K}$ 上压缩算子，$\Theta(\lambda)$ 是它的特征函数，那末(i) T 相似于等距算子的充要条件是 $\Theta(\lambda)$ 有左逆 $\Omega(\lambda)$ 成为 $|\lambda|<1$ 上的解析函数，且使 $\|\Omega(\lambda)\|\leqslant c$，$|\lambda|<1$。(ii) T 相似于部分等距算子，而且 $T\mathfrak{K}=\mathfrak{K}$ 的充要条件是 $\Theta(\lambda)$ 有右逆 $\Omega(\lambda)$，使 $\Omega(\lambda)$ 成为 $|\lambda|<1$

上的解析函数，而且$\|\Omega(\lambda)\|<c$, $|\lambda|<1$。

定理 设T是Hilbert空间$\mathfrak{K}$上的完全非酉压缩算子，那末$T\in C_0$的充要条件是(i)算子T的特征函数$\Theta(\lambda)$是内的。(ii) $\Theta(\lambda)^{-1}$在单位圆内除去极点$\{\lambda_\nu\}$外是解析的，$\Sigma(1-|\lambda_\nu|)<\infty$和(iii) $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\int\ln\|\Theta(re^{it})^{-1}\|dt<\infty$。

定理 设T是Hilbert空间$\mathfrak{K}$上压缩算子，而且(i)(强) $T^{*n}\to0(n\to\infty)$；(ii) T在单位圆内至少有一个正则点a；(iii) $tr(I-T^*T)<\infty$。那末解析函数$b(\lambda)=\det[\Theta^*(a)\Theta(\lambda)]$适合$b(T)=0$。如果$a=0$，那末

$$\ln\frac{\det(T^*T)}{\prod\limits_{\nu}|\lambda_\nu|^2}=\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\ln(\det(\Theta(re^{it})^*\Theta(re^{it}))dt,$$

其中$\{\lambda_\nu\}$是T在单位圆中特征值全体。

(4) 利用Foias及Geber关于压缩算子半群酉扩张的一个定理，在[3]中对有q个单位磁荷的磁单极的波截面量子力学建立了Von-Neumann式的定理

在[9]中研究了压缩算子半群具有有循环元的酉半群扩张存在的充要条件，对母元为初等因子的情况已被[9]解决。

§2 关于非正常算子

(1) 在[1]中给出了半正常算子的函数模型。

定理 设A是Hilbert空间中线性有界算子，A的导数子$Q=\frac{1}{2}(AA^*-A^*A)\geqslant0$。又设$H$中不存在包含$QH$并且约化$\frac{A+A^*}{2}$的闭线性子空间，那末必有Hilbert空间$\mathfrak{K}$，其中两族均匀有界自共轭算子$\{\xi(t),\ t\in[a,b]\}$和$\{\beta(t),\ t\in[a,b]\}$，而且$\xi(t)\geqslant0$。又有$H$到$\mathscr{L}^2(P(\cdot)\mathfrak{K})$上酉算子U，使得$UAU^{-1}=\hat{A}$，其中$\hat{A}x(t)\mapsto(t+i\beta(t))x(t)+\xi(t)P\cdot\int_a^b\frac{\xi(s)x(s)}{s-t}ds$, $x\in L^2[a,b]$。而且每个上述类似的奇异积分算子$\hat{A}$都一定是某个半正常算子。

(2) 利用上述奇异积分算子模型，我们给出了一类散射反问题的解(略)。

§3 关于不定度规空间中算子的谱分析

(1) 在文献[4]、[5]中给出具有不定度规的散射算子的酉性的一个基本定理，在李——Wick模型下给出散射算子的具体形式。

在[5]中还讨论了其中间系统的情况。纠正了Лившиц的一个错误。

(2) 在文献[10]中给出了Понтрягин空间以及Крейн空间中酉算子谱半径的准确估计式：

定理 设$\Pi=\Pi_-\oplus\Pi_+$, Π_+, Π_-可以无限维，U是Π上酉算子，P_+为$\Pi\to\Pi_+$的投影算子，记$T=P_+U|_{\Pi_+}$，则T是Hilbert空间$\Pi_+\to\Pi_+$上有界的(扩张)算子，如果r为U的谱半径，便有

$$r\leqslant\|T^*\|+\sqrt{\|T^*T\|-1}。$$

这个估计式在下述意义下是准确的：任给 $\alpha>1$，必存在不定度规空间 $\Pi=\Pi_-\oplus\Pi_+$ 上酉算子，使其相应的 T：$\|T\|=\alpha$，谱半径 $r=\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$。

(3) 当 $\Pi_k=\Pi_-\oplus\Pi_+$ 是 Понтрягин 空间（Π_- 为 k 维，$k<\infty$，Π_+ 为无限维）[10] 中得到 $\Pi_k\to\Pi_k$ 上酉算子一般形式。

定理 对 Π_k 上任何一个酉算子 U，一定存在 Π_k 的分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z\dotplus Z^*\}\oplus P$，$N$, p, Z。分别是负、正、零性子空间，Z^* 为 Z 的对偶空间，$\dim N+\dim Z=K$，以及 $N\to N$，$P\to P$ 的酉算子 u, $\bar{u}$，$Z\to Z$ 的一个非奇算子 S 以及 N 到 Z，P 到 Z 的算子 C, D，以及 $Z^*\to Z$ 的算子 T，$\mathrm{U}\equiv\{S, u, \bar{u}, C, D, T\}$ 的有机整体，它们相互关联是

$$\begin{aligned}
&\mathrm{U}z=Sz,\ z\in Z;\\
&\mathrm{U}n=un+Fn,\ F=SC^*u,\ n\in N;\\
&\mathrm{U}x=\bar{u}x+Gx,\ G=-SD^*\bar{u},\ x\in P;\\
&\mathrm{U}z^*=(S^{-1})^*z^*+Bz^*+Cz^*+Dz^*,\ z^*\in Z^*,
\end{aligned}\tag{A}$$

其中 $B=\frac{S}{2}(\widetilde{C}-\widetilde{D})+ST$，而 $\widetilde{C}=C^*C$，$\widetilde{D}=D^*D$，这里“*”都是把 N, P, Z 当作 Hilbert 空间时算子的共轭意思。而 Z^* 看成 Z 的共轭空间，把 Z 和 Z^* 一致化时，$T=-T^*$。

反之，六个独立算子 S, C, u, $\bar{u}$, D, T 按 (A) 方式必定义出 Π_k 上酉算子，并且 $\sigma(\mathrm{U})=\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(u)\cup\sigma(\bar{u})$。

定理还表明 U 算子实质上有标准的三角模型，其次说明即使 Π_k 上只有一个特征值 1 的酉算子也是包括 4 个独立算子 S、C、D, T 的机体。

在[11]中利用这个模型得到 Π_k 上自共轭算子模型后，从而直接证明了 Крейн-Lange 早就发表过，但至今未见完全证明的如下谱系定理：在 Π_k 上任何一个有界自伴算子 A，一定存在一族单调增加在连续谱系 P_λ：$-M<\lambda<M$，即

(i) P_λ 是投影算子（幂等且关于度规自伴）。

(ii) 记 $\Delta=(\lambda,\mu)$，并且内中不含临界点时，$P_\Delta\Pi_k=(P_\mu-P_\lambda)\Pi_k$ 是非退化正性子空间。

(iii) A 在 $P_\Delta\Pi_k$ 上限制的谱落在 Δ 中。

在[14]中用了谱算子方法，即从另一个途径也证实了 Крейн-Lange 有关谱系结论的可靠性和正确性，并求得事先给定谱系能成为自伴算子谱系的充要条件：

定理 设给定的右连续、投影算子 P_λ：$-M<\lambda<M$，它能成为某个自共轭算子的谱系的充要条件是：把有限个临界点的小邻域 O_n 挖去后，作

$$A_n=\int_{[-M,M]-O_n}\lambda dp_\lambda,$$

$\{A_n\}$ 为 Π_k 上均匀有界的。

[11]中给出了 P_λ 的具体形式。在[12]中利用酉算子一般形式研究了与一个酉算子交换的酉算子一般形式（略）。

(4) 在[13]中得到了定度规（即 Hilbert）空间上压缩算子酉扩张和线性有界算子在不定度规空间上酉扩张的一切形式（略），前者是熟知的 Halmos 的酉扩张和 Nagy 的酉扩张结果的一般化。后者是 Бродский 等研究的所谓组成“结”的特殊情况的一般化。根据我们所得到的一切酉扩张形式，便知除去某些保距对应之外，本质上是唯一的，并指出了 Бродский 所引入的“特征函数”（类比定度规上压缩算子的特征函数）本质上也是唯一的。（下转 71 页）

球对称的SU_2规范场

复旦大学　胡和生

1．在研究规范场理论时，球对称的模型是常见的，并且有着重要的作用，引起了各方面的注意[1,2]。

我们曾对球对称规范场作了系统的研究[3,4,5,7,8]。在SU_2的情形，我们完全决定了球对称规范场，研究了它们的性质，并给出了一定的物理解释。在这个报告中，我们着重叙述这些结果。由于互为规范变换的规范场是等价的，且原点可以是奇点，因而问题的解决过程是复杂的。

2．设$b^i_\lambda(x, t)\ (\lambda=1, 2, 3, 4;\ i=1, 2, 3)$为4维平坦时空的$SU_2$规范场的规范势，这里$x=x^ie_i$为空间的点，$e_i$为空间直角坐标的基向量，$t$表示时间。记$b_\lambda=b^i_\lambda X_i$，$\partial_\lambda=\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$

$$b_\lambda(x, t)\to\zeta(x, t)b_\lambda(x, t)\zeta^{-1}(x, t)-\partial_\lambda\zeta(x, t)\zeta^{-1}(x, t) \tag{1}$$

为规范变换，其中$\zeta(x, t)\in SU_2$，$X_i(i=1, 2, 3)$是李代数SU_2的一组基。

设$\mathscr{F}$为SU_2规范场，如果规范势经过空间的任一转动后都能和原来的规范势相等，则称$\mathscr{F}$为球对称的。用式子来记，即对任何$A\in SO_3$必有$\zeta(A, x, t)\in SU_2$使

$$\begin{aligned}A(\zeta(A, x, t)b(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)-\nabla\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(A, x, t))&=b(Ax, t),\\ \zeta(A, x, t)b_4(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)-\partial_4\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)&=b_4(Ax, t)\end{aligned} \tag{2}$$

成立。

我们证明了4维平坦时空的球对称SU_2规范场只能有下述三种基本类型[3]：

(1) 同步球对称——其特点是空间的转动配上同位旋空间同一旋转能使规范势（在适当规范下）保持不变。

(2) 狭义球对称——其特点是单纯的空间转动就能使规范势（在适当规范下）保持不变。

(3) 化约为U_1子群的球对称规范场。

我们论证的方法是：先设场的势满足一般球对称的定义，然后区分各种情况，找到几个规范变换，在小范围内把规范势变到所需的形式，然后再把这个结果整体化。

3．在适当的规范下，得出球对称规范势的一般形式[4]

(1) 同步球对称场

$$b^i_i=\epsilon_{ilk}x_kV(r, t)+\delta_{il}S(r, t)+x_ix_lT(r, t)$$
$$b^l_4=x_lU(r, t)$$

式中$r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$，$V$, S, T为r, t的任意函数。

(2) 狭义球对称场

$$b^l_i=R^l(r, t)x_i,\quad b^l_4=Y^l(r, t),$$

式中R, Y为r, t的任意函数。

(3) 化约的球对称场——即普通电磁势的形式。

4. 't Hooft 在研究磁单极时引进了一个同位旋向量场(Higgs 场), $Q(x, t)=q_i(x, t)X_i$, 在 q_i 不全为 0 之处，他以

$$F_{\lambda\mu}=\frac{1}{|Q|}q_i f^i_{\lambda\mu}-\frac{\epsilon_{abc}}{|Q|^3}q_a D_\lambda q_b D_\mu q_c$$

作为电磁场能量[1]，式中 $D_\lambda Q$ 为 Q_b 的规范导数，$f_{\lambda\mu}=f^i_{\lambda\mu}X_i$ 是 SU_2 规范场的强度。

$$|Q|=(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}$$

磁荷的表达式是

$$\frac{1}{8\pi}\int_S F_{\lambda\mu}dx^\lambda\wedge dx^\mu$$

我们得到[3]：同步球对称场容有磁荷为 ±1 的磁单极，狭义球对称场中无磁荷，而化约的球对称场容有磁荷为 ±m 的磁单极（m 为任意整数）。't Hooft 所研究的只是同步球对称场的一个特例。又如果把有 Higgs 场的 SU_2 场解释为电磁场和带电介子场的耦合，那末在球对称情形，如果|磁荷|>1，它必为纯电磁场[3]。

各类球对称 SU_2 规范场的性质可以列表如下[5]

类别	Higgs 场	磁荷	带电矢粒子	无源解
狭义球对称	平行	0	不化约时出现	只是静电场
同步球对称	径向	±1	同上	相当多，但一般需用数值方法求解
化约为 U_1 群的球对称	±m 重复盖（m 为自然数）	±m	必不出现	只是静电场加静磁场

5. 各类球对称 SU_2 规范场还可以进行适当的规范变换，使第 3 节中的规范势化为最简单的形式。在同步球对称规范场时，保持规范势为同步球对称形式的规范变换的特点是：它所引起的同位旋旋转的转轴是向径，并且在同一时刻以原点为心的同一球面上的各点的转角相同，并且

a) 总可以选取规范使 $S+r^2T=0$ 恒等成立[5]。

b) 求无源解时，可令 $S=T=0$[5]，就包括了所有无源解。

c) 在许多情况下，可以选取规范使

$$[b_i, f_{jk}]+[b_j, f_{ki}]+[b_k, f_{ij}]=0$$

成立，此时磁通是有守恒形式的积分[8]。

6. 关于 SU_3 的情况，[6]中写出了一类球对称规范势的形式，在[7]中提出决定一般紧致群的球对称规范场的方法。

参考文献

[1] T. T. WuC. N. Yang, In Properties of Matter under Unusual conditions (1969), 349.
[2] 't Hooft, G., Cucl. Phys., 78B (1974), 296.
[3] 谷超豪、胡和生,《物理学报》26, (1977), 155.
[4] 胡和生,《复旦学报》1 (1976), 72.
[5] 侯伯宇、谷超豪、胡和生,《复旦学报》1 (1977), 92.
[6] Chkrabarti. A., Ann. Inst. Henri Poincare A23 (1975), 230.
[7] 谷超豪，球对称规范场的决定,《复旦学报》2 (1977), 30.
[8] 谷超豪、胡和生，关于规范条件的变分问题,《科学通报》11 (1979), 492.

关于拟不变变换群上的拓扑和无限维李群

复旦大学　杨亚立

为了研究无限维空间测度和积分，И. М. Гельфанд 在 1959 年提出了关于拟不变测度的概念。他利用装备 Hilbert 空间上的拟不变测度研究了量子场论中 Bose-Einstein 交换关系的表示。P. E. Segal 在 1958 年也提出过类似的概念，但是他们都没有对平移拟不变测度理论建立相应的调和分析。在夏道行老师"无限维空间上测度和积分论"[1]中对拟不变测度和拟不变变换群上的相应拓扑进行了深刻的研究，成功地建立了关于具有拟不变测度的群上的调和分析，并且对线性拓扑空间中关于平移拟不变测度得到了更为完善的结果。这说明讨论拟不变变换群上的拓扑是十分必要的。本文主要讨论二个问题：1) 讨论线性拓扑空间中拟不变拟线性变换群上的拓扑，所得结果也适用于抽象 Wiener 过程，并对标准高斯过程作进一步的讨论。2) 当 G 是交换的无限维李群时，这里我们采用 [2] 中所述的以 Banach 空间作参数空间的无限维李群的概念。这时，拓扑群 G 局部同胚于线性拓扑空间。我们讨论了关于 G 的平移拟不变变换群上的拓扑，得到了和线性拓扑空间情形相应的一些结果。我们采用的有关术语和记号均用[1] [2]中的。

1．设 G 是实线性拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 G 中由全体开集张成的 Borel σ-代数，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于子空间 $\mathfrak{G}$ 平移拟不变的有限正则测度空间，且关于 $\mathfrak{G}$ 是遍历的，$\mathfrak{G}$ 本身具有拓扑 $\mathscr{T}$，强于 G 在 $\mathfrak{G}$ 上的诱导拓扑，且使 $\mathfrak{G}$ 按 $\mathscr{T}$ 成为完备的赋范空间，同时 $\mathfrak{G}$ 的共轭空间 $\mathfrak{G}^\dagger$ 是可分的，$(\Omega, \mathfrak{G})$ 是标准的[1]即满足 $\widetilde{G}^\mu=\mathfrak{G}^\dagger$，且 G^μ 是 Ω 的决定集。

设 T 是 G 到 G 关于 $(G, \mathscr{B})$ 可测的变换[1]，若满足下列条件：

(i) T 的值域是可测集，而且 $G\backslash\mathscr{R}(T)$ 是 μ 零集。

(ii) T 是 $\mathscr{D}(T)$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的一一映照。

(iii) 对 $A\in\mathscr{B}$，设 $\mu_T(A)=\mu(T^{-1}A)$ 有 $\mu_T\sim\mu$。

则称 T 为使 Ω 拟不变的变换[1]，显然使 Ω 拟不变变换全体构成群。通常，我们仅讨论拟不变变换群的某些子群。

若可测变换 T 进一步满足条件：对每个 $h\in\mathfrak{G}$，存在元 $\widetilde{T}(h)\in\mathfrak{G}$，使对任何实数 t，等式

$$T(tg+h)=tT(g)+\widetilde{T}(h)\quad g\in G$$

关于 μ 几乎处处成立，则称 T 为 Ω 上关于 $\mathfrak{G}$ 的拟线性变换，可逆拟不变拟线性变换全体关于乘法构成群，记为 $\{T\}$，下面将讨论可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 上的拓扑，可以知道 Ω 上每个拟不变拟线性变换 T 导出 $\mathfrak{G}$ 上的连续线性算子 $\widetilde{T}$。由 $\mathfrak{G}^\dagger$ 的可分性和 $(\Omega, \mathfrak{G})$ 标准的假定，能保证 $\mathfrak{G}$ 上每个线性有界算子 A 一定可以延拓为 Ω 上关于 $\mathfrak{G}$ 的拟线性算子 T，使 $\widetilde{T}=A$，同时在一些容易满足的条件下[1]这种延拓在允许差一零集意义下是唯一的。下面在 $\{T\}$ 上引进 d_0-距离

$$d_0(T_1, T_2)=\frac{1}{2}(d_2(T_1, T_2)+d_2(T_1^{-1}, T_2^{-1}))$$

其中 $$d_2(T_1, T_2) = \frac{1}{2}(\|\tilde{T}_1-\tilde{T}_2\| + d_1(T_1, T_2))$$

而 $$d_1(T_1, T_2) = \left(\int_G (\sqrt{d\mu_{T1}(g)} - \sqrt{d\mu_{T2}(g)})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们证明了 d_0 距离给出了 $\{T\}$ 上一个第二纲适宜拓扑。

定理 1 设 $(G, \mathscr{B}, \mu)$ 关于 $\mathfrak{G}$ 强循环[1]，且以 1 为循环元，则可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 关于由 $d_0(T_1, T_2)$ 距离导出的拓扑是一个完备的距离空间。

如果线性拓扑空间 G 本身是赋范空间，则可考虑 G 上拟不变拟线性算子构成的群 $\{T\}'$。

定理 1' 设 G 是赋范空间，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于 $\{T\}'$ 拟不变的正则概率测度，则 $\{T\}'$ 关于 $d_0'(T_1, T_2)$ 决定的拓扑是完备的。

顺便可以得到，对于 Wiener 测度的拟不变线性变换

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 K(t, s)\,dx(s)$$

其中 $$K(0, s) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t, s) \in \mathscr{L}^2(0, 1;\ 0, 1)$$

则变换相应的拉东–尼古丁导数为

$$\frac{d\mu_A}{d\mu} = |D| \exp\left\{-\int\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}K(t, s)\,dx(s)\right)^2 dt - 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}K(t, s)\,dx(s)\,dx(t)\right\}$$

其中积分均理解为随机积分，或 P–W–Z 意义下的积分。

定理 2 在定理 1 条件下，$\{T\}$ 关于 d_0–拓扑构成拓扑群。

下面将讨论高斯过程情形，设 $\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是相应于 H 的标准高斯过程，H 关于内积 (x, y) 是可分的，若 T 是拟不变拟线性变换，由条件 $x(\omega)$ 是 Ω 上的决定集

$$\int x(\omega)y(\omega)\,d\mu(\omega) = (x, y)$$

$$\int x(\omega)y(\omega)\,d\mu_T(\omega) = \int x(T\omega)y(T\omega)\,d\mu(\omega)$$

令 $x(T\omega) = (\tilde{T}x)(\omega)$，由 Feldman 定理知道 $x(\omega)\to(\tilde{T}x)(\omega)$ 对应 H 中的等价算子，为方便起见，仍记 $\tilde{T}$ 作 T。

定理 3 在标准高斯过程情形，kakutani–拟范数 $M_1(T)$ 决定的拓扑等价于 $\|T^*T-I\|_2$ 决定的拓扑，$\|\cdot\|_2$ 表示算子的 Hilbert-Schmidt 范数．特别可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 上 d_0–拓扑可由 $R(T)=\|T-I\|+\|T^{-1}-I\|+\|T^*T-I\|_2+\|T^{-1*}T^{-1}-I\|_2$ 决定。

为了进一步搞清 d_0–拓扑的构造，先构造一个空间 S，它是由如下的向量 $C=(A, B)$ 组成，其中 A 是 H 中有界自共轭算子，B 是 H 中自共轭 H–S 算子，在 S 上定义范数：$\|C\|_s=\|A\|+\|B\|_2$ 构成一个 Banach 空间。

定理 4 对于线性拓扑空间上的高斯过程，可逆拟不变拟线性变换全体 $\{T\}$ 关于 d_0–拓扑是一个连通的，以 Banach 空间 S 作为参数空间的无限维李群。

系，若 $\{T\}$ 按另一拓扑 τ 使它也成为李群，若 τ 和 d_0–拓扑可比较，则拓扑 τ 和 d_0–拓扑一致。

2、由[1]知道，当 G 是线性拓扑空间，$\mathfrak{G}$ 是 G 的子空间，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于 $\mathfrak{G}$ 拟不变拟连续的有限正则测度空间，$\mathfrak{G}$ 极大，那末 $\mathfrak{G}$ 按 s–拟距离 p_1 成为第二纲线性拓扑空间，且拓扑是适宜的，对一般群的场合，并不知道 $\mathfrak{G}$ 上能否构造非平凡的第二纲适宜拓扑。这节里我

们将讨论 G 是以 Banach 空间 E 为参数空间的交换李群情形。

这里，关于无限维李群的概念采用[2]中的，设 E 是 Banach 空间，对 $E\to F$ 的映照 f，考虑 Frechet 意义下的可微性。

定义：一个拓扑空间 G 关于拓扑 $\mathscr{T}$ 称为关于 Banach 空间 E 作参数空间的 k 次（$k\geqslant 3$）可微分李群，若它满足下述条件：

1．G 关于 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑群。

2．G 关于 Banach 空间 E 是 k 次可微分流形。

3．a) 映照 $(p, q)\to pq$, $p\in G$, $q\in G$ 是从 $G\times G$ 到 G 上的 k 次连续可微分映照。

b) 映照 $p\to p^{-1}$ 是 $G\to G$ 的 k 次连续可微分映照。

定理 5 每一个连通交换以 Banach 空间 E 为参数空间的 k 次局部等度连续可微分李群 G，存在线性拓扑空间 $\widetilde{G}$，$\widetilde{G}$ 是 G 的复盖群，且 $\widetilde{G}$ 同构于 Banach 空间 E。

系：在定理条件下，exp 映照可延拓为整个 $\widetilde{G}$ 到 G 上的开同态。

我们利用复盖 σ-代数和复盖测度概念证明了。

定理 6 设 G 是以 Banach 空间 E 为参数空间的局部连通，线性连通交换李群，k 次（$k\geqslant 3$）局部等度连续可微，同时 E 是可分的，$\mathscr{B}$ 是 G 上 Borel σ-代数，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于李子群 $\mathfrak{G}$ 拟不变拟连续[1]的有限正则测度空间，且 $\mathfrak{G}$ 是 Ω 的极大拟不变拟连续李子群，则 $\mathfrak{G}$ 上存在拓扑 $\mathscr{T}$，$\mathfrak{G}$ 按拓扑 $\mathscr{T}$ 成为第二纲拓扑群，且 G 在 $\mathfrak{G}$ 上导出拓扑比 $\mathscr{T}$ 弱，从而是适宜的。

定理 7 若 $\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 满足定理 6 条件，$(\widetilde{G}, \widetilde{\mathscr{B}}, \widetilde{\mu})$ 是 $(G, \mathscr{B}, \mu)$ 的复盖测度空间，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ 是相应于 $\widetilde{G}$ 的极大拟不变拟连续子空间，若在 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上给定一适宜拓扑 τ，则 τ 强于 μ 拓扑的充要条件是：若 $h_n\in\widetilde{\mathfrak{G}}$ 按拓扑 τ，$\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$ 能推得

$$\lim_{n\to\infty} M_1(\exp th_n)=0 \quad -\infty<t<\infty$$

定理 8 在定理 6 的条件下，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上由 $R(\tilde{h})=\left(\int_0^\infty e^{-t}M_1(\exp t\tilde{h})^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|h\|$ 决定的拓扑和 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上 μ-拓扑一致，构成完备的距离空间。

定理 9 $\mathscr{T}$ 是使得 $\mathfrak{G}$ 按拓扑 $\mathscr{T}$ 局部同胚于线性拓扑空间，且强于 $M_1(h)$，导出拓扑的最弱适宜拓扑。

类似地可建立 $\mathfrak{G}$ 上拓扑 $\mathscr{T}$ 的特征（[1] § 4.1）。本文得到夏道行老师热情帮助和指导，在此深表感谢。

参 考 文 献

［1］ 夏道行，无限维空间上测度和积分论(1965)。

［2］ B. Maissen, Acta Math., 108 (1962).

［3］ Hui-Heiung Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces (1975).

［4］ Л. С. Понтрягин: 连续群。

Yoneda 范畴与线性拓扑空间

复旦大学　肖尔健

J. L. Taylor[1] 中讨论了拓扑代数的同调和上同调，但他使用的实际上是相对范畴，要求正合序列-分裂，还有一些数学工作者，例如 A. Ja. Helemskii[2] 及 M. V. Šeinberg[3] 等，在讨论 Banach 模时也要加上类似的条件。本文证明 Yoneda 的拟 Abel 范畴（见[4]）是研究拓扑 Abel 群、线性拓扑空间、拓扑模等的适当的范畴，因而可以用 Yoneda[4] 中的方法与结果建立同调代数基本函子。本文还证明局部凸线性拓扑空间范畴、Frechet 空间范畴及局部凸线性拓扑代数上拓扑模范畴都有足够多内射对象。本文最后一个结果似乎比 G. Isac[5] 的结果强得多。

引理 1　设 $\mathbf{E}$: $0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是拓扑 Abel 群的短正合序列，χ 及 σ 是拓扑同态（指开集的象是象空间的开集），C_1 是另一个拓扑 Abel 群，γ: $C_1\to C$ 为拓扑群的同态，则存在拓扑 Abel 群及其同态的交换图

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbf{E}_1: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa_1} & B_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & C_1 & \to & 0 \\ & & & \| & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ \mathbf{E}: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \end{array} \tag{1}$$

使 $\mathbf{E}_1$ 是正合序列并 $\varkappa_1$ 及 σ_1 是拓扑同态，如果 B 和 C_1 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是 Hansdorff 的。如果 B 与 C_1 是完备的并 C 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是完备的。

推论　如果引理 1 中 A、B、C 及 C_1 是线性拓扑空间（或局部凸线性拓扑空间或 Frechet 空间或 Banach 空间）并 $\varkappa$、σ 及 γ 是线性连续映照，σ 及 $\varkappa$ 是拓扑同态，则图(1)中 B_1 是同一类型的空间，β 是线性连续映照，$\varkappa_1$ 及 σ_1 是线性拓扑空间之间的拓扑同态。

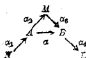
引理 2　设 $\mathbf{E}$: $0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是拓扑 Abel 群的短正合序列，$\varkappa$ 及 σ 是拓扑同态，A_1 是另一个拓扑 Abel 群，α: $A\to A_1$ 是拓扑群间同态，则存在拓扑 Abel 群及同态的交换图

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbf{E}: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ & & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \| & & \\ \mathbf{E}_1: & 0 & \to & A_1 & \xrightarrow{\varkappa_1} & B_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & C_1 & \to & 0 \end{array} \tag{2}$$

使 $\mathbf{E}_1$ 是正合序列并 $\varkappa_1$ 及 σ_1 是拓扑同态，如果 A_1 和 C 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是 Hansdorff 的。

推论　如果引理 2 中 A、B、C 及 A_1 是线性拓扑空间（或局部凸线性拓扑空间或 Frechet 空间或 Banach 空间）并 $\varkappa$、σ 及 α 是线性连续映照，$\varkappa$ 及 σ 是拓扑同态，则图(2)中 B_1 是同一类型的空间，β 是线性连续映照，$\varkappa_1$ 及 σ_1 是线性拓扑空间之间的拓扑同态。

Yoneda[4] 中称加法范畴 $\mathscr{A}$ 中一射 $A\xrightarrow{\alpha}B$ 为真的，如果它能嵌入交换图



其中 $\alpha_1=\ker\alpha_2$、$\alpha_2=\operatorname{coker}\alpha_1$、$\alpha_3=\ker\alpha_4$、$\alpha_4=\operatorname{coker}\alpha_3$。$P\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 中真照映所成的类，我们取 $\mathscr{A}\mathscr{G}$ 为拓扑 Abel 群所成范畴、$\mathscr{H}\mathscr{A}\mathscr{G}$ 为 Hausdorff 拓扑 Abel 群所成范畴。$\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{G}$ 为 Hausdorff 局部紧拓扑 Abel 群所成范畴。

$\mathscr{L}\mathscr{T}$ 为实(或复)数域上线性拓扑空间所成范畴，$\mathscr{L}\mathscr{C}\mathscr{T}$ 为实（或复）数域上局部凸线性拓扑空间所成范畴。$\mathscr{H}\mathscr{L}\mathscr{C}\mathscr{T}$ 为实(或复)数域上 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间所成范畴，$\mathscr{F}\mathscr{S}$ 为实(或复)数域上 Frechet 空间所成范畴，$\mathscr{B}\mathscr{S}$ 为实（或复）数域上 Banach 空间所成范畴。

一个拓扑代数 A 指它是实(或复)数域上局部凸线性拓扑空间，并是具么元的结合代数，乘法运算分离(或联合)连续，一个拓扑 A-模 E 是实(或复)数域上局部凸线性拓扑空间，它是 A-模，A 中元乘 E 中元的运算是 $A\times E\to E$ 分离(或联合)连续的。

$\mathscr{M}_A$ 为拓扑代数 A 上扑拓左(或右)A-模所成范畴，$\mathscr{F}\mathscr{M}_A$ 范：A 为拓扑代数它的底线性空间为 Frechet 空间。A-模的底空间也是 Frechet 空间，这种 A-模构成 $\mathscr{F}\mathscr{M}_A$。范畴 $\mathscr{B}\mathscr{M}_A$ 为：A 是 Banach 代数，A-模的底空间为 Banach 空间，这种 A-模构成 $\mathscr{B}\mathscr{M}_A$。

定理 1 设 $\mathscr{A}$ 为上面所述范畴中的任一种，$P\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 中所有真映照所成的类，则 $(\mathscr{A}, P\mathscr{A})$ 是 Yoneda[4] 意义下的拟 Abel 范畴。

因此在这些范畴上可直接用 Yoneda[4] 中的方法与结果建立 $\mathrm{Ext}^n_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}$ 函子，特别对于 $\mathbf{E}$: $0\to A\xrightarrow{\kappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是任一真射的短正合序列及 $\mathscr{A}$ 中任一对象 D 有长正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}(D, A)\to\mathrm{Hom}(D, B)\to\mathrm{Hom}(D, C)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D, A)\to$$
$$\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D, B)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D, C)\to\mathrm{Ext}^2_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D, A)\to\cdots$$
$$0\to\mathrm{Hom}(C, D)\to\mathrm{Hom}(B, D)\to\mathrm{Hom}(A, D)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(C, D)\to$$
$$\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(B, D)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(A, D)\to\mathrm{Ext}^2_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(C, D)\to\cdots$$

对于上述 $\mathscr{L}\mathscr{T}$ 至 $\mathscr{B}\mathscr{M}_A$ 范畴，$\mathrm{Ext}^n(A, B)$ 还是线性空间，k 为任何实(或复)数，$\mathbf{E}\in\mathrm{Ext}^n(A, B)$ 则 $k\mathbf{E}=(k\cdot 1)\circ\mathbf{E}=\mathbf{E}\circ(k\cdot 1)$。

对于 $\mathscr{A}\mathscr{G}$, $\mathscr{H}\mathscr{A}\mathscr{G}$, $\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{G}$, $\mathscr{M}_A$, $\mathscr{F}\mathscr{M}_A$, $\mathscr{B}\mathscr{M}_A$ 可直接用 Yoneda[4] 中的结果定义左右卫星([4] p. 553)。

拟 Abel 范畴($\mathscr{A}\mathscr{S}$) 中一对象 J 称内射对象，如果对任何 $\alpha: E\to F$, $\alpha\in\mathscr{S}I$ (对我们这里的范畴是核为 0 的真映照) 及 $\beta: E\to J$ 存在 $\gamma(F\to J$ 使 $\gamma\alpha=\beta$(见 [4]p. 554)。拟 Abel 范畴 $(\mathscr{A}, \mathscr{S})$ 称有足够多内射对象，如果对 $\mathscr{A}$ 中任一对象存在 $\alpha: A\to J$, $\alpha\in\mathscr{S}I$, J 为内射对象。

在泛函分析中熟知的具扩张性质的 Banach 空间即为范畴 $\mathscr{B}\mathscr{S}$ 中内射对象，并任一个 Banach 空间必等距地线性同构于具扩张性质的 Banach 空间(见 H. E. Lacey[6])。用范畴论的语言来讲即拟 Abel 范畴 $\mathscr{B}\mathscr{S}$ 有足够多内射对象。利用这一结果，本文证明

定理 2 拟 Abel 范畴 $\mathscr{L}\mathscr{C}\mathscr{T}$ 及 $\mathscr{F}\mathscr{S}$ 中有足够多内射对象。

以下考察拟 Abel 范畴 $\mathscr{M}_A$, A 为分离连续局部凸线性拓扑代数，$\mathscr{M}_A$ 中对象为左 A-模。为避免混淆，取 $L(E, F)$ 为线性拓扑空间 E 到 F 所有线性连续映照全体，如果 E, F 是 $\mathscr{M}_A$ 中对象，取 $\mathrm{Hom}(E, F)$ 为 E 到 F 所有连续 A-同态。

命题 1. 设 E 为一个局部凸线性拓扑空间，则 $L(A, E)$ 取简单收敛拓扑是 $\mathscr{M}_A$ 中一对象（即左 A-模）。

命题 2. 设 E 是 $\mathscr{M}_A$ 中一对象，M 是局部凸线性拓扑空间，则存在线性同构。

$$\operatorname{Hom}(E, L(A, M)) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} L(E, M)$$

并 φ 与 ψ 关于 E 与 M 是自然的。

命题 3. 设 J 是 $\mathscr{LCT}$ 中内射对象，则 $L(A, J)$ 是 $\mathscr{M}_A$ 中内射对象。

定理 3 A 是分离连续局部凸线性拓扑代数，则拟 Abel 范畴 $\mathscr{M}_A$ 中有足够多内射对象。

总之对 $\mathscr{LCT}$, $\mathscr{FS}$, $\mathscr{BS}$ 及 $\mathscr{M}_A$ 中任一对象 E，有内射分解

$$\mathbf{Y}: E \to Y^0 \to Y^1 \to Y^2 \to \cdots \to Y^n \to \cdots$$

它是正合序列，其中每个射是真射，因此可用同调代数标准方法（见 S. MacLan [7] pp. 95～96）得

$$\operatorname{Ext}^n_{(\mathscr{A}, P\mathscr{A})}(F, E) = H^n(\operatorname{Hom}(F, \mathbf{Y}))$$

其中 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{LCT}$ 或 $\mathscr{FS}$ 或 $\mathscr{BS}$ 或 $\mathscr{M}_A$。

参 考 文 献

[1] J. L. Taylor, Homology and cohomlogy for topological algebras, Advances in Math., 9 (1972), 137～182.

[2] A. Ja.Helemshii, A periodic product of modules over Banach algebras, Funkcional Anal. i Prilozen, 5 (1971), No. 1, 95～96 MR 43 6722.

[3] M. V. Seinberg, Relatively injective modules over Banach algebras, Vestnik Moskow Univ. Ser. I. Mat.·Mech., 26 (1971), No. 3, 57～58., MR 43 6729.

[4] N. Yoneda, On Ext and exact sequences, J.Fac. Sci.Univ. Tokyo, 8 (1960), 507～576.

[5] G. Isac, Modules topologique ouvert injetifs, Rev. Romaine Math. Pure App., k4, No. 6～10(1969), 1017～1024.

[6] H. E. Lacey, The isometric theory of classical Banach spaces, Springer, (1974).

[7] S. MacLane, Homology, Springer, (1963).

与线性变换完全环同构的环*(摘要)

复旦大学　许永华

环的结构理论可以说开始于 E. Artin 的工作。1926 年 Artin 把 Wedderburn 的域上有限维代数的结构定理扩展到现今称之为阿丁单纯环中去。这一工作对环理论发展具有深远影响。继 Artin 工作之后，在环结构理论中一个突破是 Jacobson 的本原环结构理论[2]。Jacobson 的本原环思想不仅扩大了环类结构研究，而且根本上摆脱了有限条件的限制。

但是直到现在，人们除了对于含有极小单侧理想的本原环建立了结构定理及同构定理以外，对于无极小单侧理想的本原环几乎没有什么知识可言。本文的目的在于，一方面进一步深化和扩展含有极小单侧理想本原环的结构定理及同构定理，另一方面对于无极小单侧理想的本原环建立它的结构定理。我们所建立的结构定理也可适用于含有极小单侧理想的本原环，并且此时与通常建立的结构定理相一致。

本文主要结果分成以下四节：

一、一个抽象环同构于线性变换完全环问题

对于有限维向量空间，Artin-Whaples[1] 作过经典研究，对于无限维向量空间，Wolfson[5] 找出了一个抽象环同构于线性变换完全环的充要条件。本节继 Wolfson 工作获得更进一步结果，特别在有限维向量空间时，我们的结果包含了 Artin-Whaples 结果。

定义 1.1　设 $\mathfrak{M}$ 是 (F, Ω) 模，$\mathfrak{N}$ 是 $(G, \bar{\Omega})$ 模，其中 $F, G, \Omega, \bar{\Omega}$ 均为环。我们说 S 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 上的一个 (ψ, σ) 模同构，若 (i) S 是 $(\mathfrak{M}, +)$ 到 $(\mathfrak{N}, +)$ 上一个同构，(ii) 对于 $x\in\mathfrak{M}$，$f\in F$，$\omega\in\Omega$ 均有 $(fx\omega)S=f^{\psi}(xS)\omega^{\sigma}$**，其中 ψ 表示 F 到 G 上同构，σ 表示 Ω 到 $\bar{\Omega}$ 上的同构。

特别 $\Omega=\bar{\Omega}$，σ 是恒等映照 I 时，则记上述 S 为 (ψ, I) 模同构。

定理 1.1　设 Ω 是结合环，那末 Ω 是某个除环 F 上左向量空间 $\mathfrak{M}$ 的 F-线性变换完全环的充要条件是：

(1) Ω 含有基座 $\mathfrak{S}$，$\mathfrak{S}^2\neq 0$ 并且 Ω 的任何非零理想皆含 $\mathfrak{S}$。

(2) 若 $\mathfrak{S}=S_1\oplus S_2$，其中 S_1, S_2 是 Ω 的极小左理想之和，那末 $S_1^{\perp}+S_2^{\perp}=\Omega$，其中 $S^{\perp}=\{r\in\Omega\,|\,Sr=0\}$。

(3) Ω 含有恒等元。

如果 Ω 满足上述(1)、(2)及(3)三个条件，那末 Ω 的任一极小右理想 $A=E\Omega$ 必可展开成除环 $K=E\Omega E$ 上左向量空间，其中 $E^2=E$，A 的 K-线性变换完全环即是 Ω，且除环 F 与除环 K 是环同构。不仅如此，(F, Ω) 模 $\mathfrak{M}$ 与 (K, Ω) 模 A 必是 (ψ, I) 模同构，并且 $\mathfrak{M}$ 的秩与 A 的秩相等，它们都等于 $\mathfrak{S}$ 的左秩。

---

* 本文由作者的七篇论文综合而成。

** 这里 ω 可以不出现，即 $(fx)S=\psi^{\psi}(xS)$ 成立。

二、关于含有极小单侧理想的本原环结构

含有极小单侧理想的本原环理论主要是它的结构定理及同构定理。本节用双侧模同构概念来描述本原环结构，而不是通常那样用 Jacobson 有限拓扑来描述。这节所述的定理深化和扩展了熟知的结构定理和同构定理。

定义 2.1 设 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 分别是除环 F 及 G 上向量空间，$\mathfrak{M}^*$ 及 $\mathfrak{N}^*$ 分别是 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的共轭空间。记 S 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 中的一个半线性变换。一个 $\mathfrak{N}^*$ 到 $\mathfrak{M}^*$ 中的映照 S' 称为 S 的伴随*，若对于 $x_1\in\mathfrak{M}$，$y_2^*\in\mathfrak{N}^*$ 皆有 $(x_1S,\ y_2^*)^{\psi^{-1}}=(x_1,\ y_2^*S')$，其中 ψ 是 F 到 G 中的同构。

定理 2.1 仍记 Ω 是 $\mathfrak{M}=\sum Fu_i$ 的 F–线性变换完全环。$\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间，$A=E\Omega$ 是 Ω 的任一极小右理想。那末 $A^*=\Omega E$ 必是 A 的共轭空间，它展开成 $K=E\Omega E$ 上右向量空间的秩即是 Ω 的基座的右秩。如记 S 为 $\mathfrak{M}$ 到 A 上的一个 $(\psi,\ I)$ 模同构，其中 ψ 是 F 到 K 上环同构，那末必存在 A^* 到 $\mathfrak{M}^*$ 上的 $(I,\ \psi^{-1})$ 模同构 S'，而 S' 是 S 的伴随，其中 $\mathfrak{M}^*$ 视为 $(\Omega,\ F)$ 模。

定义 2.2 设 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$，$(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$ 分别是 F 及 G 上对偶空间。$(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 与 $(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$ 称为 $(\psi,\ \sigma)$ 模等价，若存在 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 上一个 (ψ,σ) 模同构 S，并且 S 的伴随 S' 是 $\mathfrak{N}'$ 到 $\mathfrak{M}'$ 上的一个映照，其中 ψ 是除环 F 到除环 G 上的同构，σ 是 $\mathfrak{M}$ 的 F–线性变换完全环 Ω 到 $\mathfrak{N}$ 的 G–线性变换完全环 $\overline{\Omega}$ 上的同构。如果 $\Omega=\overline{\Omega}$ 且 σ 是恒等映照 I，那末称 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 与 $(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$ 为 $(\psi,\ I)$ 模等价。

定理 2.2 设 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 是 F 上对偶空间，$\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间，且是 $(\Omega,\ F)$ 模，$\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}^*$ 的子空间。记 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')=\{r\in\Omega\,|\,r\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}'\}$，那末有如下结论：

(i) $\mathfrak{M}'$ 必是忠实的不可约 $\mathfrak{L}$–模，$\mathscr{F}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')=\{l\in\mathfrak{L}\ \ 秩\ l\ 为有限\}$ 是 Ω 中稠密环，(在 Ω 的有限拓扑意义下)

(ii) 记 $A=E\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的任一极小右理想，$A'=\mathfrak{L}E$，$E^2=E$ 那末 $(A,\ A')=AA'$ 是 $K=E\Omega E$ 上对偶空间。并且 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(A,\ A')$，$\mathscr{F}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')=\mathscr{F}(A,\ A')=A'\Omega$ 是 $\mathfrak{L}$ 的基座，它的右秩即是 $\mathfrak{M}'$ 的秩。

(iii) $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 与 $(A,\ A')$ 是 $(\psi,\ I)$ 模等价，因此 $\mathfrak{M}'$ 与 A' 必是 $(I,\ \psi^{-1})$ 模同构。

由此定理易得下面的推论：

推论(结构定理) R 是含有极小单侧理想的本原环，当且仅当存在除环 F 上对偶空间 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 使得 R 与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 的一个子环同构，且此子环含有 $\mathscr{F}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$。

定理 2.3 设 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 及 $(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$ 分别是除环 F 及 G 上对偶空间并记 R、T 是二个环且 $\mathfrak{L}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')\supset R\supset\mathscr{F}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$，$\mathfrak{L}(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')\supset T\supset\mathscr{F}(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$。令 $A=ER$，$B=\overline{E}T$ 分别是 R 及 T 的极小右理想。如果 σ 是环 A 到环 B 上的一个同构，那末 σ 必可扩展为 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 上同构，其中 Ω，$\overline{\Omega}$ 分别是 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的线性变换完全环，并且存在一个 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 上的 (ψ,σ) 模同构 S，它有如下形式 $S=S_A\sigma S_B^{-1}$，其中 S_A 是 $\mathfrak{M}$ 到 A 上的一个 $(\psi_A,\ I)$ 模同构，S_B 是 $\mathfrak{N}$ 到 B 上 $(\psi_B,\ I)$ 模同构，并且对于任何 $\omega\in\Omega$ 有 $\omega^{\sigma}=S^{-1}\omega S$。

如果 σ 还把 R 的极小左理想 $A'=RE$ 同构映照到 T 的极小左理想 $B'=T\overline{E}$ 上，那末 S 的伴随 S' 必有 $\mathfrak{N}'S'=\mathfrak{M}'$。因此 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ 与 $(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$ 必是 $(\psi,\ \sigma)$ 模等价，并且 $\mathfrak{L}^{\sigma}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')=\mathfrak{L}(\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}')$。

---

* 这里伴随概念与通常略有不同(见[8])这里是对 $(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}^*)$ 而言，其中 $\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间。

注意 1：显然上述定理包含通常的同构定理。

注意 2：可以证明，通常的半线性同胚概念包含在我们的 (ψ, σ) 模同构概念中。

三、关于一般本原环的同构定理

在这节中我们所述的本原环不管它是否含有极小单侧理想。

定义 3.1 设 R 及 T 是二个本原环，$\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 分别是忠实的不可约 R-模及 T 模，F, G 分别是 R-模 $\mathfrak{M}$ 及 T 模 $\mathfrak{N}$ 的中心化子。我们说，R、T 满足 (ψ, σ) 条件，若存在 F 到 G 上同构 ψ 及 R 到 T 上同构 σ 以及在 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 中分别存在一个元素 u_1 及 v_1 使得对于任意元素 $f\in F$, $s\in R$ 有 $fu_1s=u_1rs$，当且仅当 $f^{\psi}v_1s^{\sigma}=v_1r^{\sigma}s^{\sigma}$。

定理 3.1 设 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$ 分别是除环 F 及 G 上对偶空间，R 及 T 分别是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ 及 $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$ 的子环。如果 R. T 满足上述的 (ψ, σ) 条件，那末必存在一个半线性同胚映照 S，它把 $\mathfrak{M}$ 映照到 $\mathfrak{N}$ 上并且 $r^{\sigma}=S^{-1}rS$, $\in R$。

注意：熟知的同构定理假设条件必满足 (ψ, σ) 条件。

四、关于无极小单侧理想的本原环结构

本节先引进 ν 拓扑概念，然后定义 ν-可和对偶空间，本节还把本原环的基座进行扩充，定义了 ν-基座，最后对含有 ν-基座本原环研究其结构，这样我们研究了不含有通常非零基座但含有 ν-基座本原环的结构。

仍设 $\mathfrak{M}=\sum Fu_i$ 是 F 左向量空间，$T_{\nu}(F, \mathfrak{M})=T_{\nu}$ 是所有秩小于 $\aleph_{\nu}$ 的 F-线性变换集合。记 $\mathfrak{M}^*$ 为 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间，$\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}^*$ 的子空间，那末对 $\mathfrak{M}$ 可引进 ν-$\mathfrak{M}'$-拓扑：

记 $\{y_i'\}_I$ 是 $\mathfrak{M}'$ 的一个子集合，其中 card $I<\aleph_{\nu}$。取 x 为 $\mathfrak{M}$ 中任一元素，并记 $U_x=x+\bigcap_{i\in I} y_i'^{\perp\mathfrak{M}}$，其中 $y_i'^{\perp\mathfrak{M}}=\{x\in\mathfrak{M}\mid xy_i'=0\}$，于是取 U_x 为点 x 的邻域，容易验证，$\mathfrak{M}$ 成为一个拓扑空间，我们称 $\mathfrak{M}$ 的这样拓扑为 ν-$\mathfrak{M}'$-拓扑。类似地对 $\mathfrak{M}'$ 可引进 ν-$\mathfrak{M}$-拓扑。

记 σ 是 $\mathfrak{M}$ 的线性变换，其秩 $<\aleph_{\nu}$，于是 $\mathfrak{M}\sigma=\sum_{i\in I} Fu_i$, card. $I<\aleph_{\nu}$ 并且有 $x\sigma=\sum_{I} g_iu_i$，其中 $\{g_iu_i\}_I$ 几乎为 0。在固定基 $\{u_i\}_{\Gamma}$ 下，我们有元素 $a_i^*(\sigma)\in\mathfrak{M}^*$, $a_i^*(\sigma)$: $x\to g_i$，因此对每个线性变换 σ 必有对应的一个线性函数组 $\{a_i^*(\sigma)\}_I$，它具有以下性质：对于 $\mathfrak{M}$ 中任一元素 x 使得 $xa_i^*(\sigma)=g_i$ 几乎为 0，我们称上述 $\{a_i^*(\sigma)\}_I$ 为 $\mathfrak{M}^*$ 的 ν-可和线性函数集。反之，对于任一 ν-可和线性函数集 $\{a_i^*(\sigma)\}_I$, card $I<\aleph_{\nu}$，在 $\{u_i\}_{\Gamma}$ 基下必可唯一地决定一个秩小于 $\aleph_{\nu}$ 的线性变换。

定义 4.1 设 $\mathfrak{M}=\sum_{\Gamma} Fu_i$, $\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间，$\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}^*$ 的子空间，若对于任一基数小于 $\aleph_{\nu}$ 的 F-线性无关组 $\{u_i\}_I$, card. $I<\aleph_{\nu}$，必有 $\mathfrak{M}'$ 的一个元素 y' 使 $u_iy'\neq 0$, $u_jy'=0$ $i\neq j$, $i, j\in I$，那末称 $\mathfrak{M}'$ 为 ν-完全的。

定义 4.2 设 $\mathfrak{M}_i$ 是 F_i-左向量空间，$\mathfrak{M}_i^*$ 是 $\mathfrak{M}_i$ 的共轭空间，$\mathfrak{M}_i'$ 是 $\mathfrak{M}_i^*$ 的子空间，$\mathfrak{M}_i$ 有 ν-$\mathfrak{M}_i'$-拓扑。记 $\widetilde{\mathfrak{M}}_i$ 是所有 $\mathfrak{M}_i$ 到 F_i 的线性连续函数，其中 $\mathfrak{M}_i$ 在 ν-$\mathfrak{M}_i'$-拓扑下，那末称 $\widetilde{\mathfrak{M}}_i$ 为 $\mathfrak{M}_i$ 的 ν-$\mathfrak{M}_i'$-连续共轭空间。

定理 4.1 设 $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1')$, $(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2')$ 是二对对偶空间，$\mathfrak{M}_i$ 有 ν-$\mathfrak{M}_i'$-拓扑，若 $\mathfrak{M}_1$ 到 $\mathfrak{M}_2$ 中

的一个半线性变换(S, ψ)是连续的，那末必有伴随S'，S'是$\mathfrak{M}'_2$到$\widetilde{\mathfrak{M}}_1$中的半线性变换，其中$\widetilde{\mathfrak{M}}_1$是$\mathfrak{M}_1$的$\nu$-$\mathfrak{M}'$-连续共轭空间。

定义 4.3 一个连续半线性变换(S, ψ)称为强连续，若S的伴随S'是$\mathfrak{M}'_2 \to \widetilde{\mathfrak{M}}_1 \cap \mathfrak{M}'_1 \subseteq \mathfrak{M}'_1$。同时称这样的伴随$S'$为$S$的强伴随。

可以证明，强连续必是连续。

定义 4.4 记$\mathfrak{M}^*$是$\mathfrak{M}$的共轭空间，$\mathfrak{M}'$是$\mathfrak{M}^*$的子空间，我们说$\mathfrak{M}'$在$\mathfrak{M}^*$中是ν-$\mathfrak{M}'$-可和的，若对$\mathfrak{M}^*$中任一ν-可和线性函数集$\{\sigma_j^*\}_I$及$\mathfrak{M}$中任一基数小于$\aleph$的元素集合$\{x_i\}_I$，那末必在$\mathfrak{M}^*$中存在子集合$\{\widetilde{\sigma}_j\}_I$，它满足如下条件：

(1) $\{\widetilde{\sigma}_j\}_I$是$\nu$-$\mathfrak{M}'$-可和线性函数集，且每个$\widetilde{\sigma}_j$在$\nu$-$\mathfrak{M}'$-拓扑下连续。

(2) 对$\{x_i\}_I$中任一元素x_i皆有$x_i\sigma_j^* = x_i\widetilde{\sigma}_j$，$j \in I$。

定义 4.5 一个对偶空间$(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$称为$\nu$-$\mathfrak{M}'$-可和的，若$\mathfrak{M}'$在$\mathfrak{M}^*$中是$\nu$-$\mathfrak{M}'$-可和的。

定义 4.6 设R是本原环，Ω是除环F上左向量空间$\mathfrak{M}$的线性变换完全环且含R $T_\nu = T_\nu(F, \mathfrak{M})$，记$\mathfrak{S}_\nu = T_\nu \cap R$，那末称$\mathfrak{S}_\nu$为$R$的$\nu$-基座，若它满足如下三个条件：

(1) $\mathfrak{S}_\nu$是$\mathfrak{M}$中$\aleph_\nu$重可迁的。

(2) $\mathfrak{S}_\nu \Omega \subset \mathfrak{S}_\nu$。

(3) 存在一个对应基 $\{u_i\}_\Gamma$（即 $\mathfrak{M} = \sum_\Gamma F u_i$ 的这样线性变换E_i的集合，它使$u_i E_i = u_i$，$u_j E_i = 0$，$i \neq j$)，对于Ω的任一秩小于$\aleph_\nu$的元素σ有$\sigma \mathfrak{S}_\nu E_i \subset \mathfrak{S}_\nu E_i$，必有$\sigma \in \mathfrak{S}_\nu$，$i \in \Gamma$。

从上面一系列概念，我们得到如下主要结果：

定理 4.2 设$(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$是一对$\nu$-$\mathfrak{M}'$-可和对偶空间，$\mathfrak{M}'$是$\nu$-完全的，如果本原环$R$与$L^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$的一个子环同构，且它含有$T^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') = T_\nu(F, \mathfrak{M}) \cap L^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$，其中$L^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$是$\mathfrak{M}$在$\nu$-$\mathfrak{M}'$-拓扑下的连续线性变换全体，那末$R$必有$\nu$-基座。

定理 4.3 设R含有ν-基座的本原环，那末必存在一对对偶空间$(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$，它是$\nu$-$\mathfrak{M}'$-可和的，$\mathfrak{M}'$是$\nu$-完全的，并且$R$与$\mathscr{L}^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$的一个子环同构，而此子环含有$\mathscr{T}^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') = T_\nu(F, \mathfrak{M}) \cap \mathscr{L}^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$，其中$\mathscr{L}^{(\nu)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$是$\mathfrak{M}$在$\nu$-$\mathfrak{M}'$-拓扑下的所有强连续线性变换。

注意：如$\nu = 0$，则0-基座即是通常基座，而0-拓扑即有限拓扑，此时强连续与连续概念一致，上述二个定理即是通常结构定理。

参 考 文 献

[1] Artin, E. and Whaples, G., The theory of simple rings, Amer J. Math., Vol. 65 (1943), 87~107.

[2] Jacobson, N., The redical and semi-simplicity of arbitory rings, Amer. J. Math., Vol. 67 (1945), 300~320.

[3] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. J. Math. Soci. Colloq. Publ., 3 Vol. 37(1956).

[4] Johnson, R. E., Equivalenc rings, Duke Math. J., Vol. 15 (1948), 787~793.

[5] Wolfson, K. G. An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations Amer. J. Math. Vol. 75 (1953), 358~386.

[6] Wolfson, K. G., Some remarks on ν-transtive rings and linear compactness, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 5 (1954), 617~619.

关于$L^p[0,1]$和一类奥尔里奇空间上的测度

华东师范大学　吴良森

$L^p[0, 1]$上柱状集测度可列可加的条件已由沈海玉同志在他的文章中讨论过了，本文对$L^p[0, 1]$和一类奥尔里奇空间中的测度作了一些粗浅的探讨，得到如下的一些结论。

1．首先以$L^p[0, 1]$中的矩量问题作工具讨论了$L^p[0, 1]$上测度可列可加性，得到如下的定理：

定理1　设$K(t, s)$是$\begin{pmatrix} 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0\leqslant s\leqslant 1 \end{pmatrix}$上的可测函数，并且$s$固定时是关于$t$的$p$次可积函数，

$$\int_0^1\left(\int_0^1 |K(t, s)|^p dt\right)^{\frac{p'}{p}} ds<+\infty$$

$$(2<p<+\infty,\ p\neq\text{正整数},\ 1\leqslant p'<[p])$$

在$L^q[0, 1]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$中取稠密子集$E$，$E$是由所有形为

$$\sum_{k=0}^{2^n} C_k^{(2^n)} t^k(1-t)^{2^n-k}$$

的多项式组成(其中$C_k^{(2^n)}$为任意常数$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, 2^n$, $n=1, 2, \cdots\cdots$)，在E中定义范数

$$\|\varphi\|=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 K(t, s)\varphi(t)dt\right|^{p'} ds\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$L^p[0, 1]$中任一柱状集测度若关于范数$\|\varphi\|$连续，一定可列可加。

2．设

$$M_p(u)=\begin{cases} \dfrac{u^p}{p}(\ln u)^n-\dfrac{n}{p}e^{p-1}u+\dfrac{n}{p}e^p, & u>e, \\ \dfrac{u^p}{p}, & 0\leqslant u\leqslant e, \end{cases}$$

$$(n\text{是自然数},\ 1<p<+\infty,\ p\neq\text{正整数})$$

并设$L^*_{M(p)}[0, 1]$为相应于上述N-函数的奥尔里奇空间，$\|\cdot\|_{M(p)}$是相应的奥尔里奇范数，记$t_\nu^{(n)}=\dfrac{\nu}{2^n}$，记

$$e_\nu^{(n)}(t)=\begin{cases} 1, & t_\nu^{(n)}\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{t-t_{\nu-1}^{(n)}}{t_\nu^{(n)}-t_{\nu-1}^{(n)}}, & t_{\nu-1}^{(n)}\leqslant t<t_\nu^{(n)}, \\ 0, & 0\leqslant t<t_{\nu-1}^{(n)}, \end{cases}$$

又设E是由形状为

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{2^n} C_\nu^{(n)} e_\nu^{(n)}(t)$$

所组成的函数全体，其中 $C_\nu^{(n)}$ 是任意常数 $\begin{pmatrix} n=1,\ 2,\ \cdots\cdots \\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2^n \end{pmatrix}$

定理 2 设 $K(t, s)$ 为 $\begin{pmatrix} 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0\leqslant s\leqslant 1 \end{pmatrix}$ 上的二元函数，当 s 固定时，$K(t, s)\in L_{M(p)}^*[0, 1]$

$$g(s)=\|K(t, s)\|_{M(p)}\in L_{M(q)}^*[0, 1]$$

$$(2<p<\infty,\ p\neq\text{正整数},\ 1<q<[p])。$$

又设 $\Phi=\{\varphi'(t),\ \varphi(t)\in E\}$，若在 E 上定义范数

$$\|\varphi\|=\left\|\int_0^1 K(t, s)\varphi'(t)dt\right\|_{M(q)}$$

$L_{M(p)}^*[0, 1]$ 上的柱状集测度若关于 $\|\varphi\|$ 连续时一定在 $L_{M(p)}^*[0, 1]$ 上可列可加。

3．其次讨论了 $L^p[0, 1]$ 上测度可列可加性的反例。

定理 3 设 $K(t, s)$ 为 $\begin{pmatrix} 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0\leqslant s\leqslant 1 \end{pmatrix}$ 上的可测函数，$K(t, s)\geqslant 0$，当 s 固定时 $K(t, s)$ 为 $L^p[0, 1]$ 中的函数，并且

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 K(t, s)^p dt ds\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

取 $\Phi=\{\varphi'(t),\ \varphi(t)\in E\}$，在 Φ 上定义范数

$$\|\varphi\|=\left\{\int_0^1\left(\int_0^1|\varphi'(t)|K(t, s)dt\right)^p ds\right\}^{\frac{1}{p}}$$

则必在 $L^p[0, 1]$ 中存在一柱状集测度关于 $\|\varphi\|$ 连续，但在 $L^p[0, 1]$ 上不可列可加。

定理 4 设 $K(t, s)$ 为可测函数，$K(t, s)\geqslant 0$ $\begin{pmatrix} 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0\leqslant s\leqslant 1 \end{pmatrix}$ 并且当 s 固定时，$K(t, s)$ 为 $L_{M(p)}^*[0, 1]$ 中的函数，

$$g(s)=\|K(t, s)\|_{M(p)}\in L_{M(p)}^*[0, 1]$$

在 Φ 中定义范数

$$\|\varphi\|=\left\|\int_0^1|\varphi'(t)|K(t, s)dt\right\|_{M(p)}$$

则在 $L_{M(p)}^*[0, 1]$ 上存在柱状集测度关于范数 $\|\varphi\|$ 连续，但是在 $L_{M(p)}^*[0, 1]$ 上不可列可加。

参 考 文 献

[1] 夏道行，无限维空间上的测度和积分论(上册)——抽象调和分析，上海科学技术出版社 1965 年。

[2] 夏道行，泛函空间上的测度，《复旦学报》1962 年 7 卷 121～131 页。

[3] 沈海玉，函数空间 $L^p[0, 1]$ 上的测度，《复旦学报》1963 年 8 卷 2 期 205～220 页。

单叶函数的系数估计和不等式

复旦大学　任福尧　张锦豪

设 S 是由在 $|z|<1$ 内正则且单叶的函数

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

的全体所组成的函数族。Σ' 表示在 $1<|\zeta|<\infty$ 内正则且单叶的函数

$$g(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^{-n}$$

所组成的函数族，本文证明下述定理：

第三项系数限制下的 Bieberbach 猜想

定理 1[1]　若 $f\in S$，则存在一单调上升的数列 $\{K_n\}(n\geqslant 7)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}K_n>2.449$，使得对一切正整数 $n\geqslant 7$ 和 $f\in S$，当 $|a_3|\leqslant K_n$ 时，对一切 $k\geqslant n$ 成立着 $|a_k|<k$，这里 K_n 是下列方程的解：

$$\psi_n(|a_3|)=\frac{(9-|a_3|^2-A_n)^2}{28+2|a_3|+3|a_3|^2+2D(|a_3|)-|a_3|^4}=B_n(\rho_0),$$

$$B_n(\rho_0)=\frac{3\rho_0^2-1}{12}+(\rho_0^2-1)\left(\frac{1}{2n}-\frac{441}{n^4}\right)+\frac{3\rho_0^2-5}{12n^2},$$

$$A_n=[\alpha_{n-1}(\rho_0)+4\alpha_n(\rho_0)+\alpha_{n-1}(\rho_0)]/n^2,$$

$$\alpha_{n+1}^2(\rho_0)=(368-364\rho_0^2)+\frac{4}{3}\rho_0^2n^3+2(\rho_0^2+1)n^2+\frac{2}{3}(\rho_0^2+6)n$$
$$+[(441.10-364\rho_0^2)+\frac{4}{3}(\rho_0^2+7)n^3+(2\rho_0^2+30)n^2$$
$$+\frac{2}{3}(\rho_0^2+142.84)n]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_n^2(\rho_0)=(366-364\rho_0^2)+\frac{4}{3}\rho_0^2n^3+\frac{2}{3}n+[(366.54-364\rho_0^2)$$
$$+\frac{4}{3}(\rho_0^2+7)n^3+2(\rho_0^2-1)n^2+\frac{2}{3}(\rho_0^2+94.84)n]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_{n-1}^2(\rho_0)=366(1-\rho_0^2)+\frac{2}{3}\rho_0^2(2n^3-6n^2+7n)+[(291.98-364\rho_0^2)$$
$$+\frac{4}{3}(\rho_0^2+7)n^3+2(\rho_0^2-1)n^2+\frac{2}{3}(\rho_0^2+142.8)n\}^{\frac{1}{2}},$$

$$D(x)=\frac{16}{15}+\frac{452(1+x)}{180}+\frac{184(1+x)^2}{144}-\frac{140(1+x)^3}{576},$$

$\rho_0=1.0657$，特别地，$K_7>1.71$，$K_8>1.74$，$K_9>1.772$，$K_{20}>1.995$。

定理 1 改进了最好的 Ehrig 的结果[5]。

关于 Springer 猜想

设 $g(\zeta)\in\Sigma'$, $\zeta=g^{-1}(w)=G(w)=w+\sum_{n=1}^{\infty}C_nw^{-n}$ 是 g 的逆函数, Springer[8] 猜想: $|C_{2k-1}|\leqslant(2k-2)!/k!(k-1)!$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$。

定理 2[2] 设 $g(\zeta)\in\Sigma'$, $G(w)$ 是 $g(\zeta)$ 的逆函数, 则当 $k=6, 7$ 时 Springer 猜想成立: $|C_{11}|\leqslant42$, $|C_{13}|\leqslant132$, 同时用不同的方法重新证明 $k\leqslant5$ 时 Springer 猜想成立, 等号仅对函数 $\zeta+\zeta^{-1}$ 的逆函数 $\frac{1}{2}w(1+\sqrt{1-4w^{-2}})$ 成立*。

定理 3 在定理 2 的条件下, 若 $b_2=0$, 则 $k=8, 9$ 时的 Springer 猜想成立: $|C_{15}|\leqslant429$, $|C_{17}|\leqslant1430$, 等号仅对函数 $\zeta+\zeta^{-1}$ 的逆函数成立。

定理 4[2,4] 设 $g(\zeta)=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k-1}\zeta^{-(2k-1)}\in\Sigma'_{odd}$, 其逆函数 $G(w)=w+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}w^{-(2k-1)}$, 则对一切正整数 k, $|C_{2k-1}|\leqslant(2k-2)!/k!(k-1)!$, 等号仅对 $\zeta+\zeta^{-1}$ 的逆函数成立。

定理 5[4] 设 $f\in S$, $a_2=0$, $g(w)=w+d_3w^3+d_4w^4+\cdots$ 是 f 的逆函数, 则有准确的估计:

$$|d_3|\leqslant1,\ |d_5|\leqslant2,\ |d_7|\leqslant5,$$

$$|d_9|\leqslant14,\ |d_{11}|\leqslant42,\ |d_{13}|=132。$$

加强的 Grunsky 和 Goluzin 不等式

定理 6[3] 设 $F\in\Sigma$, $f\in S$, 又

$$\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{k,l=1}^{\infty}\gamma_{k,l}z^{-k}\zeta^{-l},$$

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{k,l=0}^{\infty}C_{k,l}z^k\zeta^l,$$

则对任何自然数 n, n' 和 m 及任意复数 $\{\lambda_k\}_1^n$, $\{\lambda'_l\}_1^{n'}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n'}(\gamma_{k,l})^m\lambda_k\lambda'_l\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|^2}{k^m}\cdot\sum_{l=1}^{n'}\frac{|\lambda'_l|^2}{l^m},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n'}(C_{k,l})^m\lambda_k\lambda'_l\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|^2}{k^m}\cdot\sum_{l=1}^{n'}\frac{|\lambda'_l|^2}{l^m},$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^m\left|\sum_{l=1}^{n}\lambda_l(\gamma_{k,l})^m\right|^2\leqslant\sum_{l=1}^{n}\frac{|\lambda_l|^2}{l^m},$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^m\left|\sum_{l=1}^{n}\lambda_l(C_{k,l})^m\right|^2\leqslant\sum_{l=1}^{n}\frac{|\lambda_l|^2}{l^m}.$$

当 $m=1$ 时, 这就退化成 Grunsky 不等式和 Goluzin 不等式。

定理 7 设 $F(\zeta)\in\Sigma_{k,r}$, 即在 $|\zeta|>1$ 内, $F(\zeta)\in\Sigma$, 而在 $|\zeta|>r$ $(r<1)$ 上是 K-拟共形映照, 又 $\{\gamma_{m,n}\}$ 是 F 的 Grunsky 系数, 则对任何正整数 N, p 及实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$,

$$\left|\sum_{m,n=1}^{N}\gamma_{m,n}^p\lambda_m\lambda_n\right|\leqslant\left(\frac{k+r^{2p}}{1+kr^{2p}}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{|\lambda_n|^2}{n^p},$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^p \left| \sum_{m=1}^{N} \gamma_{m,n}^{p} \lambda_m \right|^2 \leqslant \left(\frac{k+r^{2p}}{1+kr^{2p}} \right)^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n^p},$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^p |b_n|^{2p} \leqslant \left(\frac{k+r^{2p}}{1+kr^{2p}} \right)^2 。$$

这里 $k=(k-1)/(k+1)$。这加强了 Lehto 的结果[6]

定理 8 设 $f \in S_{K,R}$, $(R>1)$, 即在 $|z|<1$ 内, $f \in S$, 在 $|z|<R$ 内是 K-拟共形映照, 又 $\{C_{m,n}\}$ 是 f 的 Grunsky 系数, 则对任何正整数 N, p 及实数列 $\{\lambda_m\}_1^N$,

$$\left| \sum_{m,n=1}^{N} C_{m,n}^{p} \lambda_m \lambda_n \right| \leqslant \left(\frac{1+kR^{2p}}{k+R^{2p}} \right) \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n^p},$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^p \left| \sum_{m=1}^{N} C_{m,n}^{p} \lambda_m \right|^2 \leqslant \left(\frac{1+kR^{2p}}{k+R^{2p}} \right)^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n^p}。$$

这里 $k=(K-1)/(K+1)$。

参 考 文 献

[1] 任福尧,在第三项系数限制下单叶函数 Bieberbach 猜想,《中国科学》数学专辑(1979)(即将发表)。

[2] 任福尧,单叶亚纯函数的系数,《复旦学报》4 (1978) 93～96.

[3] 任福尧,加强的 Grunsky 不等式和系数估计,《复旦学报》(未发表)。

[4] 张锦豪, Grunsky 不等式对系数问题估计的应用,《复旦学报》1 (1979), 33～39.

[5] G. Ehrig, Math. Z., 140(1974), 111～126.

[6] O. Lehto, J. Analyse Math., 30 (1977), 349～354.

[7] G. Schober, Proc. Amer. Math. Soc., 67 (1977), 111～116.

[8] G. Springer, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 421～450.

关于整函数导出的非拟解析函数空间

华东师范大学　张奠宙

非拟解析函数空间的研究已经很多，例为广义函数论中的基本空间 K 和 S 都是。为了研究线性算子谱论的需要，伍镜波[1]、张奠宙和沈祖和[2]曾引入一类由整函数导出的非拟解析函数空间。其定义是：设 $\omega(z)$ 是零点集中在正虚轴上的零类(Genus)整函数，这里

$$\omega(t)=C\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{it_k}\right),\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k}<\infty。$$

由 $\omega(t)$ 可导出一列 M_k:

$$M_k=\sup_{t>0} t^k e^{-\ln|\omega(t)|}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

记无限次可微的函数空间为 C^∞。现在用 $\{M_k\}$ 定义 C^∞ 中的子空间 C_{M_k}:

$$C_{M_k}=\{\varphi|\varphi\in C^\infty,\ |\varphi^{(k)}(x)|\leqslant A\nu^k M_k,\ A,\ \nu 是 \varphi 决定的常数\}$$

C_{M_k} 称为由 $\omega(z)$ 导出的函数空间，它是非拟解析函数环。

首先要问，什么样的整函数可以导出这类空间？我们有

定理 1　设整函数 $\omega(z)$ 的零点 $a_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 集中在上半平面，其分布关于正虚轴是对称的，且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{I_m(a_k)}<+\infty$$

则上述定义的 C_{M_k} 空间构成非拟解析函数环。

以下讨论整函数 $\omega(z)$ 的零点分布和导出的 $\{M_k\}$ 分布间的关系。设 $\omega(z)$ 的零点为 $\{it_k\}$，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k}<\infty$。$D_r=\{z||z|\leqslant r\}$。$n(r)$ 为 D_r 中所含零点个数。由[3]可知，$\omega(t)$ 导出的数列 M_k 必满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k}<\infty$，其中 $m_k=\frac{M_k}{M_{k-1}}$。用 $m(r)$ 记 D_r 中含 m_k 的个数。

我们有如下估计

定理 2　设 $n(r)$，$m(r)$ 如上所定义，当 r 充分大时将成立下列关系

$$(\ln r-\ln m_1)^{-1}\left[\frac{1}{2}\int_0^r\frac{n(t)}{t}dt-\ln r\right]\leqslant m(r)\leqslant(er)^2\int_0^{\infty}\frac{n(t)dt}{t(t^2+(er)^2)}。$$

此外还研究了 C_{M_k} 的可微性，即 $f\in C_{M_k}$ 将有 $f'\in C_{M_k}$ 的问题。

参考文献

［1］　伍镜波，非拟解析广义标量算子《复旦学报》1965年，10卷1期。
［2］　张奠宙、沈祖和，非拟解析算子和广义标量算子《复旦学报》1966年，11卷1期。
［3］　C. Roumieu, Sur Quelues extensions de la notion de distribution. Ann. Scient. SC Norm Sp 3° t. (1960) 77.

关于样条函数

复旦大学　陈天平

本文分成二大部分，第一部分讨论用样条函数逼近连续函数的构造性定理，第二部分讨论缺插值样条函数。

构造性定理

设 $x_0^{(n)}=0<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=1$，$K_{\Delta_n}[0,1]$ 表示满足下列条件的阶梯函数全体：

$$S_{\Delta_n}(x)=\begin{cases}C_\nu & x\in(x_{\nu-1}^{(n)},\ x_\nu^{(n)});\\ \frac{1}{2}(C_\nu+C_{\nu+1}) & x=x_\nu^{(n)},\quad \nu=1,\ \cdots n-1;\\ C_0 & x=0;\\ C_{n-1} & x=1,\end{cases}$$

$$\delta_{\Delta_n}^{(1)}=\max_{1\le\nu\le n}(x_\nu^{(n)}-x_{\nu-1}^{(n)}),\quad \delta_{\Delta_n}^{(2)}=\min_{1\le\nu\le n}(x_\nu^{(n)}-x_{\nu-1}^{(n)}),$$

$$\|f(x)-S_{\Delta_n}(x)\|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-S_{\Delta_n}(x)|,$$

$$E_n(f)=\inf_{S_{\Delta_n}\in k_n[0,1]}\|f(x)-S_{\Delta_n}(x)\|。$$

定理1　设 $f(x)\in C[0,1]$，$\omega(f;\ \delta)$ 是它的连续模，则

$$\frac{1}{4}\omega(f;\ \delta_n^{(2)})\le E_n(f)\le\frac{1}{2}\omega(f;\ \delta_n^{(1)}),$$

且

$$\sup_{f\in C[0,1]}\frac{E_n(f)}{\omega(f;\ \delta_n^{(1)})}=\frac{1}{2},$$

$$\inf_{f\in C[0,1]}\frac{E_n(f)}{\omega(f;\ \delta_n^{(2)})}=\frac{1}{4}。$$

设 $f(x)\in C[0,1]$，$S_{\Delta_n}(f;\ x)$ 是以 $(x_\nu^{(n)},\ f(x_\nu^{(n)}))$ 为顶点的折线函数，则成立着

定理2　设 $f(x)\in C[0,1]$，$\omega_2(f;\ \delta)=\sup\limits_{\substack{x,x\pm h\in[0,1]\\ |h|\le\delta}}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|$，则

$$\|S_{\Delta_n}(f;\ x)-f(x)\|=0(\omega_2(f;\ \delta_n^{(1)}))。$$

定理3　设 $f(x)\in C[0,1]$，$x_\nu^{(n)}=\frac{\nu}{n}(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n)$，则存在绝对常数 C_1 和 C_2，使不等式

$$C_1\omega_2\left(f;\ \frac{1}{n}\right)\le\|f(x)-S_{\Delta_n}(f;\ x)\|\le C_2\omega_2\left(f;\ \frac{1}{n}\right)。$$

对于次数 k 亏值1的周期样条函数成立着

定理4　设 $f(x)$ 是以1为周期的周期连续函数，$S_{n,k}(f;\ x)$ 是以 $\frac{\nu}{n}(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n)$ 为

节点的 k 次，亏值 1 的周期样条函数，则存在常数 $C_{k,1}$ 及 $C_{k,2}$ 满足

$$C_{k,1}\omega_{k+1}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)\leqslant\|f(x)-S_{n,k}(f;\ x)\|\leqslant C_{k,2}\omega_{k+1}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)。$$

为了证明定理 3 及定理 4，我们证明更一般的定理。用 $C_p[0, 1]$ 表示以 1 为周期的周期连续函数全体。

定理 5 设 $\Delta_n: 0=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=1$，$\|\Delta_n\|=\max(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)})$，$f(x)\in C_p[0, 1]$，$S_{k,\Delta_n}(x)=S_{k,\Delta_n}(f; x)$ 是以 Δ_n 为样条节点的 k 次样条函数，如果满足：

(i) 当 $f(x)\in C_p[0, 1]$，$\|S_{k,\Delta_n}(f;\ x)-f(x)\|=0(1)\ (\|\Delta_n\|\to 0)$，

(ii) 当 $\|f^{(k+1)}(x)\|\leqslant M$ 时，$\|f(x)-S_{k,\Delta_n}(f;\ x)\|\leqslant CM\cdot\|\Delta_n\|^{k+1}$，

则对于任意 $f(x)\in C_p[0, 1]$，成立着

$$\|S_{k,\Delta_n}(f;\ x)-f(x)\|\leqslant C_1\omega_{k+1}(f;\ \|\Delta_n\|)。$$

定理 6 设 $\varepsilon_n\to 0$，且满足 $\varepsilon_n\leqslant C\varepsilon_{2n}$（$C$ 是大于 1 的常数），$x_\nu^{(n)}=\frac{\nu}{n}$，$S_{k,n}(x)$ 是以 $x_\nu^{(n)}$ 为样条节点的 k 次样条函数，则当

$$\|S_{k,n}(f;\ x)-f(x)\|\leqslant\varepsilon_n,$$

成立着

$$\omega_{k+1}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)=0(\varepsilon_n)。$$

关于缺插值样条函数

有关缺插值样条函数问题，虽有一些讨论，但都是就一些具体的五次、六次缺插值样条函数（见[1], [2], [3]）。本节中对 C^0 类，C^1 类，C^2 类一般 m 次缺插值样条函数进行讨论。

设 $\Delta_n: 0=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=1$，$h_\nu^{(n)}=(x_{\nu+1}-x_\nu)$，$t_{\nu,k}^{(n)}=x_\nu^{(n)}+\frac{k}{m}h_\nu^{(n)}$，$k=0, 1, 2, \cdots m$，

如果函数 $S_{\Delta_n}(x)$ 满足下列条件：

(i) 在 $[x_\nu^{(n)}, x_{\nu+1}^{(n)}]$ 上，$\nu=0, 1, \cdots n-1$，$S_{\Delta_n}(x)$ 是 m 次多项式；

(ii) $S_{\Delta_n}(t_{\nu,k}^{(n)})=f(t_{\nu,k}^{(n)})$，$\nu=0, 1, 2, \cdots n-1$，$k=0, 1, \cdots, m$，

则称 $S_{\Delta_n}(x)$ 为以 $x_\nu^{(n)}$ 为样条节点，$t_{\nu,k}^{(n)}$ 为内插节点的 m 次 C^0 类缺插值样条函数，且成立着

定理 7 设 $f(x)\in C^r[0, 1]$，$r=0, 1, \cdots m$，则

$$\|S_n^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=0(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)};\ \|\Delta_n\|)),\quad (p\leqslant r)$$

其中 $\|\Delta_n\|=\max(x_{i+1}-x_i)$，在节点 $x_\nu^{(n)}$ 上，

$$|S_n^{(p)}(x_\nu+)-f^{(p)}(x_\nu)|=0(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)};\ \|\Delta_n\|)),$$

$$|S_n^{(p)}(x_\nu-)-f^{(p)}(x_\nu)|=0(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)};\ \|\Delta_n\|))。$$

如果函数 $S_{\Delta_n}(x)$ 满足：

(i) 在 $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ 上 $\nu=0, 1, \cdots n-1$，是 m 次多项式；

(ii) $S_{\Delta_n}(x)\in C^1[0, 1]$；

(iii) 在 $t_{\nu,k}=x_\nu+\frac{kh_\nu}{m}$ 上，$k=1, 2, \cdots m-1$，$f(t_\nu)=S_{\Delta_n}(t_\nu)$，

称 $S_{\Delta_n}(x)$ 为以 x_ν 为样条节点，$t_{\nu,k}$ 为内插节点的 C^1 类缺插值样条函数。

定理 8 设 $f(x)\in C^r[0, 1]$，$r=0, 1, 2, \cdots m$，则对于周期样条函数或满足端点条件

$S'_{\Delta_n}(0)=f'(0)$, $S'_{\Delta_n}(1)=f'(1)$时，存在着唯一的 C^1 类样条函数 $S_{\Delta_n}(x)$，且成立着

$$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|\leqslant C_{r,m,p}\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)};\ \|\Delta_n\|),\quad (p\leqslant r,\ r=0,\ 1,\ 2)$$

当 $\dfrac{\max(x_{i+1}-x_i)}{\min(x_{i+1}-x_i)}\leqslant\beta<\infty$ 时，

$$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|\leqslant C_{r,m,p}\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|)。(p\leqslant r,\ r=3,\ 4,\ \cdots m)$$

为了叙述简单，我们只讨论等分节点的一类 C^2 类缺插值样条函数。

设 $f(x)\in C[0,\ 1]$，$h_n=\dfrac{1}{n}$，$x_\nu=\dfrac{\nu}{n}$，$t_\nu=x_\nu+\dfrac{h_n}{3}$，$\nu=0,\ 1,\ \cdots n-1$。 如 $S_n(x)$ 满足下列条件：

(i) $S_n(x)\in C^2[0,\ 1]$；

(ii) 在 $[x_\nu,\ x_{\nu+1}]$ 上，$\nu=0,\ 1,\ \cdots n-1$，$S_n(x)$ 是m次多项式；

(iii) $S_n(x_\nu)=f(x_\nu)$，$S_n^{(p_k)}(t_\nu)=f^{(p_k)}(t_\nu)$，$0\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_{m-3}\leqslant m$，

(iv) $S''_n(0)=f'(0)$，$S''_n(1)=f'(1)$。

则称 $S_n(x)$ 是 C^2 类的m次缺插值样条函数。

设 $p(x)$ 是[0, 1]上的一个m次多项式，则 $p(x)$ 可表成

$$p(x)=p(0)u_{0,0}(x)+p(1)u_{0,1}(x)+p'(0)u_{1,0}(x)+p'(1)u_{1,1}(x)+\sum_{k=1}^{m-3}p^{(p_k)}\left(\frac{1}{3}\right)u_k(x),$$

其中 $u_{i,j}(x)$ 及 $u_p(x)$ 为满足下列条件的次数不高于m的多项式，

$$u_{i,j}^{(l)}(k)=\begin{cases}L & \text{当 } i=l,\ j=k\\ 0 & \text{当 } i\neq t,\ \text{或 } j\neq k\end{cases}\quad i,\ j,\ l,\ k\ \text{取0或1},$$

$$u_{i,j}^{(p_k)}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots m-3,$$

$$u_{p_k}^{(p_k)}\left(\frac{1}{3}\right)=1,\ u_{q_k}^{(p_k)}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ \text{当 } p_k\neq q_k,\ u'_{p_k}(0)=u'_{p_k}(1)=u_{p_k}(0)=u_{p_k}(1)=0。$$

定理9. 如果

$$|u''_{1,0}(0)-u''_{1,1}(1)|>|u''_{1,0}(1)|+|u''_{1,1}(0)|,$$

则存在唯一的 C^2 类的m次缺插值样条函数满足(i)，(ii)，(iii)，(iv)，且当 $f(x)\in C^r[0,\ 1]$，$p_{m-3}\leqslant r\leqslant m$，则

$$\|S_n^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=0\left(n^{p-r}\omega\left(f^{(r)};\ \frac{1}{n}\right)\right),\ (p\leqslant r)$$

参 考 文 献

[1] A. Meir and A. Sharma, Lacunary interpolation by Spline, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973), 433～442.

[2] A. K. Varma, Lacunary interpolation by spline I, Acta Math. Sci. Hungary 31 (3～4) (1978), 185～192.

[3] A. K. Varma, Lacunary interpolation by spline II, Acta Math. Sci. Hungary 31 (3～4) (1978), 193～203.

有关偏微分方程的一些应用问题

复旦大学 数学系偏微分方程教研组
数学研究所微分方程研究室

一、超音速绕流计算

总的问题是求无粘流空气动力学方程组在各种边界条件下的数值解。然而因被绕流物体(飞行器外形)的不同，具体计算方法也各有差异。

(1) **三维钝头绕流计算**

钝头前面将产生一脱体激波，位置待定，因此要求解的问题是非线性混合型方程组的不定边界问题。我们用稳定法进行计算，即在方程中添上含时间导数的一项，再用差分方法求这个双曲型方程组的数值解。计算中，当 $t\to\infty$ 时，解渐趋稳定，就将这个稳定值作为原定常问题的解。在计算中激波位置是浮动的，网格点的位置也每次改变。差分格式用 Mac-Cormark 格式，所采用的计算方法已适用于三维的经烧蚀后各种头部外形的有攻角绕流。

(2) **身部计算**

在身部附近，由于气流为超音速，相应的微分方程是双曲型的，所以要求解的是非线性双曲型方程组的不定边界问题。我们也采用和(1)类似的方法进行计算，整个计算方法适用于确定各种旋转体与一些非轴对称身部的周围的流场。对于钝锥，若沿着轴向方向无限地往前计算，可得到锥型流场。

(3) **翼身组合体**

在计算身部流场的基础上，进一步考虑翼身组合体的计算，关键在于翼面的处理。我们将薄翼视为流场中的一个间断面来处理，这种计算方法可以适用于比较复杂的外形物体的小攻角超音速绕流计算，比过去将机翼机身分开考虑而忽略相互干扰的计算方法相比有所改进。

(4) **关于渐近收敛性的讨论**

我们讨论了模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}=0,$$

在定边界 $y=0$ 处给 $u=u_-$，在不定边界处，要求解 u 与 u_+ 相衔接，衔接处满足“激波”条件 $S'=\dfrac{f(u_{\text{左}})-f(u_{\text{右}})}{u_{\text{左}}-u_{\text{右}}}$，可以证明，在初始条件 $x=0$ 处任给一个“激波”位置与初始条件，则 $x\to\infty$ 时。相应差分方程的解趋于一个确定的极限，这个极限就是锥型流的解：

$$u=u_-,\ S'=\frac{f(u_+)-f(u_-)}{u_+-u_-}。$$

二、自共轭椭圆型方程的等值面边值问题及其推广

在电法测井、静电场、稳定温度场、流体力学、空心柱形杆的扭转和等离子体的平衡等问题

中都提出了自共轭椭圆型方程的一类具有等值面边界条件的边值问题，我们称之为等值面边值问题。

以非齐次拟调和方程为例

$$Lu=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=F,\quad(\sigma\geqslant\sigma_0\ (\text{常数})>0),$$

在有界区域 Ω(具有分片光滑的边界 $\Gamma=\Gamma_a\cup\Gamma_b\cup\Gamma_c\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_i\right)$ 上考察如下的边值问题:

$$\begin{cases}u|_{\Gamma_a}=f,\\ \sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_b}=g,\\ \left(\sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)|_{\Gamma_c}=h,\ (\lambda>0),\\ u|_{\Gamma_i}=\text{常数(待定)},\quad \displaystyle\int_{\Gamma_i}\sigma\frac{\partial u}{\partial n}ds=A_i(\text{已知常数}),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\end{cases}$$

这就是一个等值面边值问题,其中 $\Gamma_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上的边界条件与通常的三类典型的边界条件不同,称为等值面边界条件。

(1) 利用变分原理,通过对泛函数

$$U(u)=\iint_{\Omega}\left[\frac{\sigma}{2}|\text{grad}\,u|^2-Fu\right]dx-\int_{\Gamma_b}guds+\int_{\Gamma_c}\left(\frac{1}{2}\lambda u^2-hu\right)ds-\sum_{i=1}^{n}A_iu\Big|_{\Gamma_i}$$

在函数集合 $$M=\left\{u(x)\left|\begin{matrix}u\in W_2^1(\Omega)\\ u|_{\Gamma_a}=f,\ u|_{\Gamma_k}=C_k(\text{任意常数})(k=1,\ \cdots,\ n)\end{matrix}\right.\right\}$$

中的极小化，我们直接证明了上述等值面边值问题在 $W_2^1(\Omega)$ 中的广义解的存在唯一性，同时也可以证明此广义解可通过一些典型边值问题的广义解的线性组合得到。

(2) 提出了用有限元素法求解上述等值面边值问题的计算程序——等值面处理程序，计算结果已用于实际工作。

(3) 我们研究了二阶自共轭椭圆型方程等值面边值问题解的极限性态，证明了当等值面边界 Γ 以一定的方式收缩为一点时，原等值面边值问题的解收敛于相应的具有点源问题的解。作为应用,可知对于空心柱形杆的扭转问题,当内孔缩成一点时，其对应的应力状态和无内孔时的应力状态一致。

(4) 讨论了等值面边值问题广义解(弱解)的光滑性及其有限元素法的收敛性。对二维多角形区域中一类齐次等值面边值问题,证明了三角形线性有限元素法解 u^h 和弱解 u 之间的误差估计为

$$\|u^h-u\|_{W_2^1(\Omega)}=O(h^\alpha)。\ (0<\alpha\leqslant1)$$

(5) 进一步将等值面边值问题的提法拓广为互补边值问题。设 M_i 为空间 $L^2(\Gamma_i)$的一个闭子空间，$M_i^\perp$ 为其正交补,则在 Γ_i 上可定义互补边界条件为:

$u|_{\Gamma_i}$ 及 $\left(\sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)|_{\Gamma_i}$ 在 $M_i^\perp$ 及 M_i 上的投影分别已知。

如此形成的边值问题称为互补边值问题。我们证明了自共轭椭圆型方程的互补边值问题

的广义解的存在性和唯一性。对 M_i 的不同选取，可得出不同形式的边界条件。它们在一些力学问题上有应用。

我们还将二阶自共轭椭圆型方程的互补边值问题拓广到重调和方程以及弹性力学方程组中去。

(6) 联系石油试井中压力曲线的计算，对于二阶线性抛物型方程具有等值面边界条件的定解问题，证明了广义解的存在唯一性，用有限元素法对此问题进行了计算，得到了良好结果。

三、有限元素法的应用与推广

结合机械强度与振动，电子光学、加速器设计等方面，完成了一批实际课题。例如，在弹塑性方面，完成了叶轮构件予应力处理的弹塑性应力分析。在电子枪计算中，用有限元素法计算电场，用小步抛物线法计算电子轨迹方程，计算速度快，可用于设计方案的选择。在等离子加速器的静磁场计算中，先提出了一般情形下处理三维静磁场问题的标势方法，对方程进行了化简，再用有限元素法得到良好结果。

四、石油地震勘探理论模型

利用波动方程的理论，推导了单层界面反射波的一个近似公式，利用该公式进行计算，能模仿野外工作在计算机上进行放炮试验，录制理论模型磁带，已用于考核与试验数据处理方法。

同时，在石油地震勘探的偏移技术中，可归纳到三个自变数波动方程在一个平面角内的边值问题，对方程作近似处理后，采用显式差分格式，结果较好。

此外，借用了微分方程求解中有限元素法处理复杂区域的能力，进行了各种复杂地层的射线轨迹计算，并进一步发展为亮点模型技术的计算，已提供实际应用。

五、等离子体平衡计算

Tokamak 装置中等离子体平衡问题可以化成一个二维的非线性椭圆型方程的边值问题。方程是

$$L\psi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = -\mu_0 j_\theta(r, z, \psi),$$

这里 ψ 为磁面函数。记 Ω 是所考察的区域，当等离子体被一导体壁包住时，Ω 是不与 $r=0$ 相交的有界区域；否则，Ω 是半平面 $r>0$。式中 $j_\theta(r, z, \psi)$ 是 ψ 的非线性函数，例如：当 $\psi<0$ 时（真空区）$j_\theta=0$，当 $\psi>0$ 时 j_θ 为 ψ 的已知函数。μ_0 是一个常数，它使右端满足约束条件 $\int_\Omega \mu_0 j_\theta d\Omega = I_0$（已知常数），对这个问题（包括有导体壳以及没有导体壳只有线圈的情况相应的电流分布有线性分布、准线性分布等），用格林函数法与有限元素法作了计算，计算结果良好。

关于二个自变量拟线性双曲型方程组的边值问题

复旦大学　李大潜　俞文鮆

对于拟线性双曲型方程组的力学背景及初步描述，先见于 Courant 与 Friedrichs 的书[1]，其后出现了一些研究工作[2~6]。在此基础上，作者在以往的工作中已经建立起较为系统的结果[7~10]：在方程组的系数及边值函数均为其一切变量的 C^1 函数时，只要所考察的边值问题的最小示性数小于 1，那末在局部区域中它必存在着唯一的 C^1 解。这儿，边值问题的形式可以是典型的或一般的，固定边界的或不定边界的，边界不切于特征的或边界切于特征的，等等。利用这些结果，我们已处理了不少气体力学中的问题，包括含有间断性气流的问题。现在，我们对以下二方面作进一步的研究。

(一)我们在充分光滑的函数类中进一步考察边值问题的局部可解性。为了在原点附近的某个区域上求解上述各类边值问题，采取下列步骤：

(1) 利用边值条件，在原点确定函数值，并形成所有的主对角变量。

(2) 考虑特征的分布情况，在处理边界条件时，将相应于发出特征的主对角变量用另一些主对角变量来表示，求出这种表示之下在原点的 Jacobi 阵 Θ，即得该问题的示性阵。

(3) 考虑每个特征对于所属的角状区域的二个边界曲线斜率在原点的数值偏离，确定其比值(在[0, 1)之中)，构成对角阵 σ，称为这个问题的特征分布阵。

定理　对于前面提到的各类边值问题，设有关函数为 C^∞ 的(或充分光滑的)，只要 $\Theta\sigma^k$($k=1, 2, \cdots$) 均不以 1 为特征值，则该边值问题在局部区域上存在唯一的 C^∞ 解(或充分光滑解)。

我们给出了上述定理的二个应用。其一，减弱了[4]中一个边值问题的可解性条件，证实了[4]的作者的一个予测。其二，发展了[2]、[3]的结果，使之适用于等熵或不等熵的情形，这个结果可表示为如下定理。

定理　假设一维空气动力学方程组的初始条件在原点具有间断，而二侧为充分光滑，那末该问题在局部区域上恒存在着唯一的分块光滑解，它可以包括弱间断、中心波、激波与接触间断，其解的结构和相应的 Riemann 问题相同。

(二)我们考察了拟线性双曲型方程组的中心波定解问题，对于这种带有多值性奇点的解，在幅度较小的情形中，证明了某种定解问题的适定性。并利用这个结果和以往关于扇形区域上不定边界问题的结果，可证明下述定理，它是 P. D. Lax 关于一般守恒律双曲组 Riemann 问题结果的扩充[11~12]。

定理　假设守恒律双曲组的有关函数为充分光滑，其每个特征或为强非线性的、或为弱非线性的，初始值在原点的跃度适当小，而在原点二侧为充分光滑，那末该间断初始值问题在原点近旁存在着唯一的局部解，该解可以包括弱间断、中心波、激波与接触间断。(下转 38 页)

二阶线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯特问题

复旦大学　李明忠　侯宗义

考察复数形式的二阶椭圆型方程组

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{Z}^2}+q_1(Z)\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}+q_2(Z)\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2}+q_3(Z)\frac{\partial^2 W}{\partial Z\partial \bar{Z}}+q_4(Z)\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Z\partial \bar{Z}}$$

$$+h\left(Z,\ W,\ \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}},\ \frac{\partial W}{\partial Z}\right)=0,\ Z\in G, \tag{1}$$

满足以下边界条件

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda_1(Z)}\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}\right]\gamma_1(Z),\ \operatorname{Re}[\overline{\lambda_2(Z)}W]=\gamma_2(Z),\ \ Z\in\Gamma \tag{2}$$

的广义解。其中

$$h\left(Z,\ W,\ \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}},\ \frac{\partial W}{\partial Z}\right)=\gamma_1(Z)\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}+\gamma_2(Z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial Z}+\gamma_3(Z)\frac{\partial W}{\partial Z}$$

$$+\gamma_4(Z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}}+S_1(Z)W+S_2(Z)\bar{W}+S_0(Z)。$$

设 $q_i(Z)$ 是有界可测函数，它满足条件

$$2\sup_{Z\in\bar{G}}(|q_1(Z)|+|q_2(Z)|)+\sup_{Z\in\bar{G}}(|q_3(Z)|+|q_4(Z)|)\leqslant q_0<1, \tag{3}$$

$\gamma_i(Z)$, $S_j(Z)\in L_p(G+\Gamma)$, $p>2$, $\lambda_k(Z)$, $\gamma_k(Z)\in C_\nu^{(k-1)}(\Gamma)$ 且在 Γ 上 $\lambda_k(Z)\neq 0$。

若 G 是单连通区域，可不妨认为是单位圆，这时边界条件可化为标准形：

$$\operatorname{Re}\left[Z^{-n_1}\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}\right]=\gamma_1(Z),\ \operatorname{Re}[Z^{-n_2}W]=\gamma_2(Z),\ Z\in\Gamma:|Z|=1, \tag{4}$$

这里 $n_k=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda_k(Z)$，称为边值问题的指标。

边值问题(1)、(4)的特别情形，当 $q_i(Z)=\gamma_i(Z)=S_j(Z)\equiv 0$ 时，对应的复式方程(1)通常称为 A. B. Бицадзе 方程组，这时边值问题就是对应于两个解析函数的 Riemann-Hilbert 问题，而当 $q_i(Z)\equiv 0$，低阶项系数 $\gamma_i(Z)$，$S_j(Z)$ 不全为零时，边值问题就相当于两个一阶复式方程组的 Riemann-Hilbert 问题。因此一般情形的边值问题(1)、(4)是关于解析函数和广义解析函数 Riemann-Hilbert 问题的推广。现概述我们在文献[1]、[2]、[3]中研究这类问题所得的主要结果如下。

在文献[1]中讨论了二阶复式方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}+a_1(Z)\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}+a_2(Z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial Z}+\lambda[b_1(Z)W+b_2(Z)\bar{W}]=f(Z) \tag{5}$$

适合边界条件(4)的边值问题。并按指标的各种不同符号证得以下三个定理。

定理 1 如果指标 $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, 则边值问题(5)、(4)对所有参数 λ 有按 Hölder 意义的连续解，可能除去一个离散数列 $\{\lambda_k\}(0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\cdots)$，它是与边值问题等价的积分方程的特征值，而当 $\lambda \neq \lambda_k$ 时，边值问题可解，且解依赖于 $2(n_1+n_2+1)$ 个任意实常数，齐次边值问题有 $2(n_1+n_2+1)$ 个线性独立解。

定理 2 如果指标 $n_1<0$, $n_2 \geqslant 0$(或 $n_1 \geqslant 0$, $n_2<0$)，则边值问题(5)、(4)对所有参数 λ，可能除去一个离散数列 $\{\lambda_k\}(0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\cdots)$ 正规可解的充要条件有 $-2n_1-1$(或 $-2n_2-1$)个，当且仅当这些条件满足时可解，且解依赖于 $2n_2+1$(或 $2n_1+1$) 个任意实常数。齐次边值问题有 $2n_2+1$(或 $2n_1+1$)个线性独立解。

定理 3 如果指标 $n_1<0$, $n_2<0$, 则边值问题(5)、(4)对所有参数 λ，可能除去一个离散数列 $\{\lambda_k\}(0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\cdots)$ 正规可解的充要条件有 $-2(n_1+n_2+1)$ 个，当且仅当这些条件满足时有唯一解，齐次问题仅有零解。

附带指出，A Джураев 在文[4]中曾经考虑了形如

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{Z}^2}+a(Z)\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}+\lambda b(Z)W=h(Z), \quad |Z|<1 \tag{6}$$

的二阶复式方程适合边界条件

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}\right]=\gamma_1(Z), \ \operatorname{Re}[W]=\gamma_2(Z), \ |Z|=1 \tag{7}$$

的边值问题。证明了当 λ 不是特征值时可解，齐次问题有两个线性独立解。显然它就是定理 1 中两个指标全取为零的特别情形。

在文[2]中讨论了方程系数带有奇线的二阶复式方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{Z}^2}+\frac{1}{|y|^\alpha}\left[a(Z)\frac{\partial W}{\partial \bar{Z}}+b(Z)\frac{\partial \overline{W}}{\partial Z}+c(Z)W+d(Z)\overline{W}\right]=0, \ Z\in G, \tag{8}$$

满足边界条件

$$\operatorname{Re}[\lambda_1(t)W]=\gamma_1(t), \ \operatorname{Re}\left[\lambda_2(t)\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}+\lambda_3(t)W\right]=\gamma_2(t), \ t\in\Gamma \tag{9}$$

的广义 Riemann-Hilbert 问题。这里 G 是以 Γ 为境界的任意有限区域，$a(Z)$, $b(Z)$, $c(Z)$, $d(Z)\in L_p(G+\Gamma)$, $p>2$, $\lambda_k(t)$, $\gamma_k(t)\in C_\nu(\Gamma)$, $\lambda_k(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$, $0<\alpha$, $\nu<1$。文中采用把上述边值问题化为解等价奇异积分方程组的方法，证明了齐次边值问题至多有有限 p 个线性独立解，而要使非齐次边值问题可解，必须 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ 同时满足有限 q 个可解条件。

文[1][2]都是在二阶导数项系数 $q_i(Z)\equiv 0$ 的情况下，讨论了一类二阶复式方程的广义 Riemann-Hilbert 问题。值得指出，$q_i(Z)$ 均恒为零和不全为零的两种情形有着本质不同。当方程系数属于 $L_p(G+\Gamma)$, $p>2$ 函数类时，前者对应的等价积分方程是弱奇性的，后者却是奇性的。在文[3]中进一步讨论了 $q_i(Z)$ 可以不全为零的情形，通过引进一些新的积分算子，建立了同这边值问题等价的奇异积分方程，并对有关算子的性质和范数作了研究和估计，证明了在条件(3)下，文[1]中所得到的定理，可以类似地推广到 $q_i(Z)$ 不全为零的一般情形。换言之，同样得到边值问题(1)、(4)正规可解的充要条件，指标同解个数的关系，以及广义解的一般表达式。

文[3]还指出，二阶复式方程(1)的低阶导数项系数按 $L_p(G+\Gamma)$ 范数取得适当小的限制，并非绝对必要。如果引进常参数 λ，考察带参数 λ 的二阶复式方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}+q_1(Z)\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}+q_2(Z)\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial Z^2}+q_3(Z)\frac{\partial^2 W}{\partial Z\partial Z}+q_4(Z)\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial Z\partial Z}$$

$$+\lambda h\left(Z,\ W,\ \frac{\partial W}{\partial \overline{Z}},\ \frac{\partial W}{\partial Z}\right)=0,\ Z\in G, \tag{10}$$

这时可去掉这限制，证得和边值问题(10)、(4)等价的奇异积分方程是 Fredholm 型的，于是借助于 Fredholm 定理可分别按 λ 为特征值和非特征值两种情形，类似地给出它们的可解性结论。

最后还指出，基于文[3]对有关积分算子性质研究的结果，应用 Schauder 不动点原理，可以把研究线性方程组广义黎曼-希尔伯特问题所得的结果，推广到拟线性以至非线性椭圆型方程组的情形中去。

参 考 文 献

[1] 李明忠，一类二阶椭圆型方程组广义 R—H 边值问题的可解性，《复旦学报》(自然科学版)，1978 年第 3 期。

[2] 侯宗义，一类含奇线的二阶椭圆型方程组的广义黎曼——希尔伯特边值问题，《复旦学报》(自然科学版)，1978 年第 4 期。

[3] 李明忠，二阶线性椭圆型方程组广义黎曼——希尔伯特问题，《复旦学报》(自然科学版)，1978 年第 4 期，1979 年第 1 期。

[4] А. Джураев, Сибир. Матем. Журнал, т. 9, 1 (1968).

高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动

复旦大学　江福汝　高汝熹

在薄板、薄壳理论中，常遇到最高阶导数项带小参数的高阶椭圆型方程的各种边值问题，但是现有的工作主要是讨论狄立克雷问题。原因是 M. I. Vishik 和 L. A. Lyusternik, 所提出的构造边界层的方法，不适用于一般的边值问题。1971 年，C. Comstock, 应用两变量展开法讨论四阶椭圆型方程的混合边值问题[1]，我们又应用两变量展开构造边界层的方法，简化 Comstock, 的工作，导出求渐近解的递推公式[2]。本文应用[2]中的方法，讨论 $2(m+l)$ 阶椭圆型方程的一般边值问题，导出渐近解并作出余项估计。

在 1975 年，J. G. Besjes 应用 Vishik、和 Lyusternik，构造边界层的方法，讨论了上述方程的狄立克雷问题[3]。

一、问题的提法

采用[3]中的记号，考察一般边值问题：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon^{2l} L_1 u_\varepsilon + L_0 u_\varepsilon = f(x),\quad x\in\Omega,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0 \tag{1.1}$$

$$B_j u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = g_j(x)|_{\partial\Omega},\quad (j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{1.2}$$

其中

$$L_0 u \equiv \sum_{|\beta|\leqslant 2m} c_\beta(x) D^\beta u,\quad (-1)^m \sum_{|\beta|=2m} c_\beta(x)\xi^\beta \geqslant \alpha_0|\xi|^{2m},$$

$$L_1 u \equiv \sum_{|\beta|\leqslant 2(m+l)} a_\beta(x) D^\beta u,\quad (-1)^{m+l} \sum_{|\beta|=2(m+l)} a_\beta(x)\xi^\beta \geqslant \alpha_1|\xi|^{2(m+l)},$$

$$B_j u \equiv \sum_{|h|\leqslant m_j} b_h^{(j)}(x) D^h u,\quad 0\leqslant m_j\leqslant 2(m+l)-1$$

α_0 和 α_1 是正的常数，ε_0 是充分小的正数。假设

(A_1)：系数 $a_\beta(x)$、$c_\beta(x)$ 是充分次可微、$\partial\Omega$ 是充分光滑，边界算子 B_j 满足对应于 L_ε 的补充条件[5]；

(A_2)：原边值问题(1.1)～(1.2)和退化边值问题：

$$L_0 u = f(x),\quad x\in\Omega \tag{1.3}$$

$$B_j u|_{\partial\Omega} = g_j(x)|_{\partial\Omega},\quad (j=0,1,\cdots,m-1) \tag{1.4}$$

在区域 $\bar{\Omega}=\Omega+\partial\Omega$ 存在充分次可微的解(在[5]中讨论了这些解存在的条件)。

二、形式渐近解

假设原边值问题(1.1)～(1.2)的渐近解是

$$u_\varepsilon \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x) \tag{2.1}$$

代入(1.1)，比较等式两端 ε 的各次幂的系数，得到递推方程：

$$L_0 w_n = \delta_{n,0} f(x) - L_1 w_{n-2l}, \quad (n=0,\ 1,\ \cdots) \tag{2.2}$$

其中 $\delta_{n,0}=\begin{cases}1, & 当\ n=0\\ 0 & 当\ n\neq 0\end{cases}$，和将负下标的量取作零。以后再推导 w_n，$(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 应满足的边值条件。

在 $\partial\Omega$ 的邻域构造边界层项。引进局部坐标 $(\rho,\ \varphi)$，$\varphi=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n-1})$，$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$。在局部坐标系中算子 L_ε 具有形式：

$$L_\varepsilon^* \equiv \varepsilon^{2l} L_1^* + L_0^* \equiv \varepsilon^{2l}\Big(a^*_{2(m+l)} D_\rho^{2(m+l)} + \sum_{\substack{|\beta|\leq 2(m+l)\\ \beta_1\neq 2(m+l)}} a^*_\beta D_\rho^{\beta_1}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big) + \Big(c^*_{2m} D_\rho^{2m} + \sum_{\substack{|\beta|\leq 2m\\ \beta_1\neq 2m}} c^*_\beta D_\rho^{\beta_1}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big) \tag{2.3}$$

式中 $a^*_{2(m+l)}=a^*_{2(m+l),0,\cdots,0}$，$c^*_{2m}=c^*_{2m,0,\cdots,0}$。再引进两变量，

$$\tilde{\rho}=\frac{u(\rho,\ \varphi)}{\varepsilon},\quad \bar{\rho}=\rho, \tag{2.4}$$

式中 $u(\rho,\ \varphi)=\int_0^\rho\Big[(-1)^l\dfrac{c_{2m}(t,\ \varphi)}{a_{2(m+l)}(t,\ \varphi)}\Big]^{\frac{1}{2l}}dt$，将算子 L_ε^* 分解成

$$L_\varepsilon^{**}\equiv\varepsilon^{-2m}(K_0+\varepsilon K_1+\cdots+\varepsilon^{2(m+l)}K_{2(m+l)}) \tag{2.5}$$

式中 $K_0\equiv u_\rho^{2m}c_{2m}\Big[(-1)^l\dfrac{\partial^{2(m+l)}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)}}+\dfrac{\partial^{2m}}{\partial\tilde{\rho}^{2m}}\Big]$，$K_n$，$(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2(m+l))$ 是关于 $\tilde{\rho}$ 的 $2(m+l)-n$ 阶微分算子(略去了系数上的"*"号)。

假设边界层是由下式给出：

$$V_\varepsilon(\tilde{\rho},\ \bar{\rho},\ \varphi)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n v_n(\tilde{\rho},\ \bar{\rho},\ \varphi) \tag{2.6}$$

代入(1.1)所对应的齐次方程：$L_\varepsilon^* V_\varepsilon=0$，令 ε 的各次幂的系数为零，得到关于 v_n，$(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 的递推方程：

$$K_0 v_n=-\sum_{i=1}^{2(m+l)}K_i v_{n-i} \tag{2.7}$$

关于 v_0 的方程是 $K_0v_0=0$，它的特征方程 $(-1)^l\lambda^{2(m+l)}+\lambda^{2m}=0$ 具有 l 个负实部的根 $-\lambda_k$，$(k=1,\ \cdots,\ l)$ 可以求得边界层型的解：

$$v_0=\sum_{k=1}^{l}\beta_k^{(0)}(\bar{\rho},\ \varphi)\exp(-\lambda_k\tilde{\rho}) \tag{2.8}$$

其中 $\beta_k^{(0)}$ 是任意函数。关于 v_1 的方程是 $K_0v_1=-K_1v_0$，令 $K_1v_0=0$，得到关于 $\beta_k^{(0)}$，$(k=1,\ \cdots\ l)$ 的一阶方程：

$$(-2l)c_{2m}u_\rho\frac{\partial\beta_k^{(0)}}{\partial\rho}+\Big[(-4ml-2l^2+l)c_{2m}u_{\rho\rho}+\Big(-\frac{a_{2(m+l)-1}}{a_{2(m+l)}}c_{2m}+c_{2m-1}\Big)u_\rho\Big]\beta_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1}\Big(-\frac{a_{2(m+l)-1,j}}{a_{2(m+l)}}c_{2m}+c_{2m-1,j}\Big)u_\rho\frac{\partial\beta_k^{(0)}}{\partial\varphi_j}=0 \tag{2.9}$$

以后再推导 $\beta_k^{(0)}$ 的定解条件。从 v_1 的齐次方程又可求得边界层型的解 v_1 等等。这样继续下去，可以逐步求得 v_n，$(n=0,\ 1,\ \cdots)$。

假设边值问题(1.1)～(1.2)的解在 $\partial\Omega$ 的邻域具有展开式：

$$u_\varepsilon\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n+\varepsilon^p\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n v_n \tag{2.10}$$

其中 p 是待定常数。将边值条件(1.2)用局部坐标表示出

$$B_j^* u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \equiv \sum_{|h| \le m_j} b_h^{(j)} D^h u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = g_j(\varphi), \quad (j=0, 1, \cdots, m+l-1) \tag{2.11}$$

(仍用原来的字母表示微分算子在局部坐标系中的系数)再根据(2.4)式引进两变量 $\tilde{\rho}$ 和 ρ, 将 B_j^* 分解成

$$B_j^{**} \equiv \varepsilon^{-m_j}(H_0^{(j)} + \varepsilon H_1^{(j)} + \cdots + \varepsilon^{m_j} H_{m_j}^{(j)}), \ (j=0, 1, \cdots m+l-1) \tag{2.12}$$

式中 $H_0^{(j)} \equiv b_{m_j}^{(j)} u_\rho^{m_j} D_{\tilde{\rho}}^{m_j}$, $H_n^{(j)}$, $(m=1, \cdots, m_j)$ 是 $\tilde{\rho}$ 的 m_j-n 阶微分算子。将(2.10)式代入(2.11), 则得到 w_n 和 $\beta_k^{(n)}$ 的边界值的关系式:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_j w_n + \varepsilon^{p-m_j}(H_0^{(j)} + \varepsilon H_1^{(j)} + \cdots + \varepsilon^{m_j} H_{m_j}^{(j)}) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = g_j(\varphi) \tag{2.13}$$

$$(j=0, 1, \cdots m+l-1)$$

对于 $m_0=1$, $m_j=j+1$ 的情形(其他情形可以类似地讨论), 取 $p=m+1$, 比较等式两端 ε 的各次幂的系数得

$$B_j w_0 = g_j(\varphi), \ (j=0, 1, \cdots, m-1) \tag{2.14}$$

$$B_m w_0 + H_0^{(m)} v_0 = g_m(\varphi), \ H_0^{(m+\alpha)} v_0 = 0, \ (\alpha=1, 2, \cdots l-1) \tag{2.14'}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_j w_\mu = 0, \ (j=0, 1, \cdots m-\mu-1), \ B_{m-\mu} w_\mu + H_0^{(m-\mu)} v_0 = 0, \\ &B_{m-\mu+\alpha} w_\mu + H_0^{(m-\mu+\alpha)} v_\alpha + \cdots + H_\alpha^{(m-\mu+\alpha)} v_0 = 0, \ (\alpha=1, \cdots, \mu-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_{m+\alpha} w_{\mu-\alpha} + H_0^{(m+\alpha)} v_\mu + H_1^{(m+\alpha)} v_{\mu-1} + \cdots + H_\mu^{(m+\alpha)} v_0 = 0 (\alpha=0, 1, \cdots, \mu-1) \\ &B_{m+\mu} w_0 + H_0^{(m+\mu)} v_\mu + H_1^{(m+\mu)} v_{\mu-1} + \cdots + H_\mu^{(m+\mu)} v_0 = g_{m+\mu}(\varphi), \\ &H_0^{(m+\alpha)} v_\mu + H_1^{(m+\alpha)} v_{\mu-1} + \cdots + H_\mu^{(m+\alpha)} v_0 = 0 (\alpha=\mu+1, \cdots l-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.15'}$$

$$(\mu=1, 2, \cdots, l-1)$$

$$B_j w_{l+\nu} + H_0^{(j)} v_{j+\nu} + \cdots + H_{j+\nu}^{(j)} v_{\nu-1} = 0 \ (j=0, 1, \cdots, m-1) \tag{2.16}$$

$$B_{m+\alpha} w_{l-\alpha+\nu} + H_0^{(m+\alpha)} v_{l+\nu} + \cdots + H_{l+\alpha+1}^{(m+\alpha)} v_{\nu-(\alpha+1)} = 0 (\alpha=0, 1, \cdots l-1) (\nu=0, 1, \cdots) \tag{2.16'}$$

上面省去了取边界值的记号。从(2.2)和(2.14)式可知 w_0 是退化边值问题的解, 求得 w_0 后代入(2.14')式, 得到 $\beta_k^{(0)}$, $(k=1, \cdots, l)$ 的定解条件, 根据方程(2.9)可以解出 $\beta_k^{(0)}$, $(k=1, \cdots l)$, 再代入(2.8)式就求得 v_0, 将 v_0 代入(2.15)式(取 $\mu=1$)又得到 w_1 的边值条件, ……这样继续下去可以逐步求得 w_n 和 v_n, $(n=0, 1, \cdots)$。

引进无限次可微函数 $\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \le \rho \le \frac{1}{3}\rho_0 \\ 0 & \text{当 } \frac{2}{3}\rho_0 \le \rho \le \rho_0 \\ 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中的其他点} \end{cases}$, 有定理:

定理1 在假设(A_1), (A_2)下,

$$U_M(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{M} \varepsilon^i w_i + \varepsilon^{m+1} \sum_{i=0}^{M+m-1} \varepsilon^i \psi(x) v_i \tag{2.17}$$

是边值问题(1.1)～(1.2)的 M 阶形式渐近解。

三、余项估计

以 $\tilde{C}^{2(m+l)}$ 表示 $C^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$ 中满足齐次边值条件 $B_j u|_{\partial\Omega}=0$, $(j=0, 1, \cdots, m+l-1)$ 的函

数集.假设

(A_3): $(L_0u,\ u)\geqslant K_0\|u\|^2_{L_2}$, $(L_1u,\ u)\geqslant -K_1\|u\|^2_{L_2}$, 当 $u\in \bar{C}^{2(m+l)}$, K_0 和 K_1 是与 ε 无关的常数,

可以证明 $\|Z_M\|_{L_2}\equiv\|u_\varepsilon-U_M(x,\varepsilon)\|_{L_2}=0(\varepsilon^{M+1})$, 又应用[3]中类似的方法可以证明 $[Z_M]_j=O(\varepsilon^{M+1-j})$, $(j=0,\ 1,\ \cdots M)$ 所以有定理:

定理 2 在假设 (A_1)～(A_3) 下,边值问题(1.1)～(1.2)具有渐近解:

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{M}\varepsilon^i w_i+\varepsilon^{m+1}\sum_{i=0}^{M+m-1}\varepsilon^i\psi(x)v_i+Z_M \tag{2.18}$$

其中 $[Z_M]_j=0(\varepsilon^{M+1-j})$, $(j=0,\ 1,\ \cdots M)$ M 是任意正整数。

参 考 文 献

[1] Comstock, C., SIAM J. Appl. Math., 20, 3 (1971).

[2] 江福汝,《复旦学报》(自然科学版) 2 (1978)。

[3] Besjes, J.G., J. Math. and Appl., 49, 1 (1975).

[4] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959).

[5] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications, Springer-Verlag, (1972).

(上接 31 页)

参 考 文 献

[1] R. Courant, K. O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, (1948).

[2] 谷超豪、李大潜、侯宗义,《数学学报》, 11, (1961), 314～327, 《数学学报》, 12, (1962)132～143.

[3] 谷超豪、李大潜、侯宗义,上海市科学技术论文选集, (1960)数学化学版, 55～65.

[4] 谷超豪,《数学学报》, 13, (1963)32～48.

[5] 王柔怀、伍卓群,《吉林大学学报》, 2, (1963)459～502.

[6] V. Tomée, Arch. Rat. Mech. Anal., 8 (1961)433～443.

[7] Lee Dan-Tsin, Yu Wen-tzu, 李大潜、俞文魮, Scientia Sinica 13, No. 4, (1964)529～549.

[8] Lee Dan-Tsin, Yu Wen-tzu, Scientia, 13, No. 4, (1964)551～562.

[9] Lee Dan-Tsin, YuWen-tzu, Scientia Sinica, 14, No. 7 (1965)1065～1067.

[10] 李大潜、俞文魮,复旦大学数学研究所数学论文集(1964)60～94.

[11] A. Jeffrey, Quasilinear Hyperbolic Systems and waves, (1976).

[12] P. D. Lax, Comm. Pure and Appl. Math., 10 (1957)537～566.

关于最优控制理论和计算机控制的几个问题

复旦大学　李训经

Л. С. Понтрягин 的最大原理[1,2]和 R. Bellman 的动态规划方法[3]给出了处理最优控制问题的一般方法。把最优控制理论用于工程实践，需要具体解决一些问题。线性系统的快速最优控制和二次最优控制研究得较深入，近来又用于计算机控制。本文综述这方面的一些结果。

一、线性系统的快速最优控制

设受控对象的状态方程是

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+b(t,\ u(t)),\ x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

这里 x 和 u 是 n 维和 m 维向量，$A(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵，$b(t,\ u)$ 是 n 维向量，关于 t、u 是连续的。设在 m 维空间中给定一集 U，如果可测函数 $u(t)$ 取值于 U 中，我们就称 $u(\cdot)$ 是容许控制。快速最优控制问题是：对于给定的 x_0，选取容许控制 $u(\cdot)$，使得(1)的解 $x=x(t)$ 满足条件 $x(t_1)=0$，且 t_1-t_0 最小。

该问题当 $b(t,\ u)=B(t)u$，且 U 是凸集时，为一系列作者所研究[2,4~10]。1964 年，在复旦大学数学研究所的《数学论文集》的一篇综合报告[11]中，作者把 U 的凸性和 $b(t,\ u)$ 关于 u 的线性或凸性的条件去掉，得到了十分一般的结果，它包括下述定理。

定理 1　设 $b(t,\ 0)=0$，$0\in U$，并且当 $t>0$，$\mu\neq 0$ 时

$$g(t,\ \mu)=\int_{t_0}^{t_0+t}\max_{u\in U}(\mu,\ \Phi^{-1}(t_0+t,\ \tau)b(\tau,\ u))d\tau>0,$$

这里 $\Phi(t,\ \tau)$ 适合

$$\frac{d\Phi(t,\ \tau)}{dt}=A(t)\Phi(t,\ \tau),\ \Phi(\tau,\ \tau)=I,$$

那末最短时间 T 是方程

$$F(t)=1$$

的最小正根，这里

$$F(t)=\max_{\mu\neq 0}\frac{-(\mu,\ x_0)}{g(t,\ \mu)},$$

并且，如果 μ_0 是上式在 $t=T$ 时的极值元素，即

$$g(T,\ \mu_0)=-(\mu_0,\ x_0),$$

那末最优控制 $u_0(t)$ 使关系式

$$\max_{u\in U}(\mu_0,\ \Phi^{-1}(t_0+T,\ t)b(t,\ u))=(\mu_0,\ \Phi^{-1}(t_0+T,\ t)b(t,\ u_0(t)))$$

在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上几乎处处成立。

该结果是 Н. Н. Красовский[12] 和 L. W. Neustadt[13] 结果的拓广。它是根据 А. А. Ляпунов 关于向量测度的值域是凸闭集的定理[14]，推出等时区的凸闭性，再运用凸集分离性定理而证明的。以后，1967 年 Ф. Кириллова 在[15]中指出有这种可能性，在 1971 年书[16]中得到了类似的结果。

二、线性系统的二次最优控制

1．线性系统的二次最优控制问题，首先由 R. E. Kalman 解决[17]，得到最优控制是状态的线性反馈，并且反馈增益由 Riccati 方程决定。对于定常系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu(t),\ x(0)=x_0, \tag{2}$$

使目标泛函

$$J(u)=\int_0^\infty\{(Qx,\ x)+2(Sx,\ u)+(Ru,\ u)\}dt \tag{3}$$

取最小值的问题，也称为调节器的解析设计。结论是：最优控制是 $u(t)=-R^{-1}(B'P+S)x(t)$，而 P 适合矩阵二次方程

$$A'P+PA+Q-(PB+S')R^{-1}(B'P+S)=0。$$

А. М. Летов[18]、章仁为[19]都讨论过该问题。R. E. Kalman 在[20]中又讨论了 $m=1$ 时该问题的逆问题，得到：如果 $u=-k'x$ 是使系统

$$\frac{dx}{dt}=(A-bk')x$$

稳定的反馈控制，那末在一定条件下，存在 $Q\geqslant0$，使目标泛函

$$J(u)=\int_0^\infty\{(Qx,\ x)+u^2\}dt$$

取最小值的最优控制就是 $u=-k'x$。

我们[21]研究了一般情况下的线性二次最优控制的逆问题，得到

定理 2 对于线性系统(2)，假设线性反馈

$$u=-Kx \tag{4}$$

使系统

$$\frac{dx}{dt}=(A-BK)x$$

稳定，且给定了 $R>0$ 和 $P\geqslant0$，那末存在 Q 和 S，使得目标泛函(3)取最小值的最优控制就是(4)，且

$$\min_u J(u)=(Px_0,\ x_0)。$$

该定理表明：任一使系统稳定的线性反馈控制，都是在某种二次判据意义下的最优控制。

2．近十几年来，人们力图把线性系统的调节器设计理论移到时滞系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),$$

$$x(\xi)=\varphi(\xi)\quad(-h\leqslant\xi\leqslant0)$$

关于目标泛函(3)取最小值的最优控制问题。首先得到最大原理[2,22]，然后利用 Fredholm 积分方程理论[23]或动态规划方法[24]讨论该问题。我们[25]利用一阶线性偏微分方程组解的唯一

性证明了

定理 8 对于正则方程组

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{\nu}A_i(t)x(t-h_i)-H(t)p(t),$$

$$\frac{dp(t)}{dt}=Q(t)x(t)-\sum_{i=0}^{\nu}A_i'(t+h_i)p(t+h_i),$$

$$x(t_0+\xi)=\varphi(\xi)\quad(-h_\nu\leqslant\xi\leqslant 0),\quad p(t)=\begin{cases}Zx(t_1),\ t=t_1,\\ 0,\ t>t_1\end{cases}$$

其中 $0=h_0<h_1<\cdots<h_\nu$, $H'(t)=H(t)$, $Q'(t)=Q(t)$。如果在区域 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $0\leqslant\sigma$, $\theta\leqslant h_\nu$ 上有连续的 $P(t,\sigma,\theta)$ 适合方程组

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,0,0)=A_0'(t)P(t,0,0)+P(t,0,0)A_0(t)+Q(t)$$

$$-P(t,0,0)H(t)P(t,0,0)+\sum_{i=1}^{\nu}\{A_i'(t+h_i)P(t,h_i,0)+P(t,0,h_i)A_i(t+h_i)\},$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)P(t,0,\theta)=[A_0'(t)-P(t,0,0)H(t)]P(t,0,\theta)$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu}A_i'(t+h_i)P(t,h_i,\theta),$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)P(t,\sigma,\theta)=-P(t,\sigma,0)H(t)P(t,0,\theta),$$

$$P(t_1,\sigma,\theta)=\begin{cases}Z,\ \text{如果}\ \sigma=\theta=0,\\ 0,\ \text{如果}\ \sigma+\theta>0。\end{cases}$$

那末当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时

$$p(t)=P(t,0,0)x(t)+\sum_{i=1}^{\nu}\int_{-h_i}^{0}P(t,0,\xi+h_i)A_i(t+\xi+h_i)x(t+\xi)d\xi。$$

利用该定理及最大原理，就可以得到一般情形下的线性反馈。

三、计算机控制问题

把线性系统的二次最优控制理论应用到跟踪给定值 z 的问题时，M. Athans[26] 以简单的一阶系统

$$\frac{dx}{dt}=ax+bu(t),\ x(0)=x_0 \tag{5}$$

为例指出，目标泛函不能取为 $\int_0^\infty\{q(z-x(t))^2+u^2(t)\}dt\,(q>0)$，而应采用

$$\int_0^\infty\left\{q(z-x(t))^2+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}dt \tag{6}$$

当电子计算机用于生产过程自动控制时，控制作用 $u(t)$ 并不是连续的，而是逐段常值的，即当 $k\theta\leqslant t<(k+1)\theta$ 时，$u(t)\equiv u(k\theta)=u_k(k=0,1,2,\cdots)$。如果要讨论计算机控制下系统(5)跟踪给定值 z 的问题，目标泛函也不能取(6)，而应取

$$J=\int_0^\infty q[z-x(t)]^2dt+\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)^2 \tag{7}$$

我们在《复旦学报》1978年第2期上[27]证得

定理4 对于系统(5)和目标泛函(7)，最优控制是偏差 $y_k = z - x_k$ 的离散形式的比例、积分控制

$$u_k = u_0 + \mu_2 y_0 - \mu_2 y_k - \mu_1 \sum_{\nu=0}^{k-1} y_\nu,$$

其中参数 μ_1 和 μ_2 由矩阵二次方程决定。

定理5 对于具有决定性干扰的系统

$$\begin{aligned} &x(t) = x^1(t) + x^2(t), \\ &\frac{dx^1}{dt} = a_1 x^1 + b_1 u(t),\ x^1(0) = x_0, \\ &\frac{dx^2}{dt} = a_2 x^2 + b_2 g(t),\ x^2(0) = 0。\end{aligned} \tag{8}$$

如果 $\frac{dg}{dt} - a_1 g \equiv \text{const.}$，$u(t)$ 是逐段常值的，那末使(7)取最小值的最优控制由两部分组成：$u_k = u_k^{(1)} + \mu_3 u_k^{(2)}$，其中 $u_k^{(1)}$ 是偏差 y_k 的比例、积分控制，$u_k^{(2)}$ 是克服干扰 g 的前馈控制：

$$u_{k+1}^{(2)} - e^{a_1\theta} u_k^{(2)} = -\frac{a_1 b_2 (e^{a_2\theta} - 1)}{b_1 a_2 (e^{a_1\theta} - 1)} (g_{k+1} - e^{a_1\theta} g_k)。$$

并且它关于系统的参数是不灵敏的。

这就从最优控制的观点论证了上海炼油厂计算机控制[28]方案的合理性。（下转83页）

线性多变量系统第Ⅱ类规范形的演化

华东师范大学　郑毓蕃

不变量和规范形的研究是线性控制系统理论的一个重要内容。利用不变量的概念可使线性系统的表示“参数化”，即线性系统可以被一组有序参数唯一确定。在不变量概念的基础上可以给出线性控制系统的规范表达式。它的研究不仅进一步弄清了线性系统的代数结构，而且为研究系统的最小实现、零极点配置、观察器及动态补偿的设计提供了重要工具。M. J. Denham[1]等将规范形分为二类。其中第II类规范形对进一步的研究往往起更大的作用。特别是在设计工程问题时，如何具体地将一个线性系统，通过代数等价变换、实现它与第II类规型形之间的相互转换往往是设计系统的关键步骤之一。

D. G. Luenberger[2]曾给出第II类规范形的一种结构及变换方法。后来V. H. Popov[3]引入了Kronecker不变量的概念，以便消除Luenberger规范形中的不确定性。其实Kronecker不变量的提出只是对Luenberger形作了一些人为的限制性条件。这种限制完全可以用其他规定来代替。本文借用Popov的概念，将Kronecker不变量作为一组参数。但含义已与Popov的已有所不同了。并在这一基础上构造代数等价变换的演化矩阵，用以演化第II类规范型。

已给系统

$$\begin{cases} \dot{X}=AX+BU \\ Y=CX+DU \end{cases} \tag{1}$$

其中X、U、Y分别是n维、m维、p维向量。A、B、C是具有相应阶数的矩阵。对系统(1)常用一个四联矩阵$[A, B, C, D]$来表示。对线性系统(1)的状态向量X作非奇异线性变换，变换阵记为S。令$\bar{X}=SX$。那么在“新状态”$\bar{X}$下的系统表现为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}=\bar{A}\bar{X}+\bar{B}U \\ Y=\bar{C}\bar{X}+\bar{D}U \end{cases} \tag{2}$$

系统(1)、(2)称为代数等价系统。它们之间满足以下关系：$\bar{A}=SAS^{-1}$、$\bar{B}=SB$、$\bar{C}=CS^{-1}$、$\bar{D}=D$。因为在代数等价变换下D不变，因而以下讨论中都取$D=0$。

单变量系统的规范形之研究，在六十年代初已完全解决。但多变量系统规范型之研究要复杂得多。按照Popov的定义，他考察了一个能控对$[A, B]$。且令$\mathrm{Rank}B=m$。记$B=[b_1 b_2 \cdots b_m]$，b_i是n维列向量。记Kronecker不变量记为$n_1, n_2, \cdots n_m$。将Popov的主要结果推广到完整的线性系统$[A, B, C]$上有：

定理1　对系统$[A, B, C]$，它是能控的，那么系统的不变量为$\{\alpha_k^{ij}\}$，$i=1, 2\cdots m$，$j=1, 2\cdots i-1$时$k=0, 1\cdots\min(n_i, n_j-1)$；当$j=i, i+1, \cdots m$时$k=0, 1, \cdots\min(n_i, n_j)-1$。$\{\alpha_k^{ij}\}$使等式(3)成立

$$A^{n_i}b_i=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{\min(n_i, n_j-1)}\alpha_k^{ij}A^k b_j+\sum_{j=i}^{m}\sum_{k=0}^{\min(n_i, n_j)-1}\alpha_k^{ij}A^k b_j \tag{3}$$

其中 n_i, $i=1, 2, \cdots m$ 是 Kronecker 不变量。$\{b_1, Ab_1, \cdots A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots A^{n_2-1}b_2, \cdots b_m, Ab_m, \cdots, A^{n_m-1}b_m\}$ 是正则向量集。另一组不变量为 $\{\gamma_k^{ij}\}$

$$\gamma_k^{ij}=c_i^T A^k b_j \tag{4}$$

其中 c_i^T 是 C 的第 i 行向量。$i=1, 2\cdots p$; $j=1, 2, \cdots m$; k 取遍 $\{1, 2, \cdots, n_j-1\}$。则 $\{\gamma_k^{ij}\}$ 有 $p\times n$ 个参数。

$\{\alpha_k^{ij}\}$ 的不变性、独立性、完备性在 Popov 的文章中已有证明。$\{\gamma_k^{ij}\}$ 的不变性可以通过代数等价性条件直接检验。

定理 2 对能控的系统 $[A, B, C]$ 可通过非奇异变换 $S_1=(b_1, Ab_1\cdots A^{n_1-1}b_1\cdots A^{n_m-1}b_m)$，代数等价于第一类规范形 $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}]$。$\bar{A}$, $\bar{B}$ 的结构可参阅[1]。而

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \cdots & \bar{c}_{1m} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \cdots & \bar{c}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{c}_{m1} & \bar{c}_{m2} & \cdots & \bar{c}_{mm} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_{ij}=(\gamma_0^{ij}, \gamma_1^{ij}, \cdots \gamma_{n_j-1}^{ij})。$$

证明 $\bar{A}$, $\bar{B}$, 结构已有证明。$\bar{C}$ 的结构用(4)，由代数等价条件得到验证。

为了求得第 II 类型规范形的更简练的形式。我们对 Popov 所规定的不变量略作改变。事实上只要适当地改变输入量的序号，即对输入端前面加一个改变行次序的变换阵，那末可将原来的 Kronecker 不变量重新排列，使之满足关系式：$n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots n_m$。

这时(3)式可具有更简单的形式

$$A^{n_i}b_j=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{n_j-1}\alpha_k^{ij}A^k b_j+\sum_{j=i}^{m}\sum_{k=0}^{n_i-1}\alpha_k^{ij}A^k b_j \tag{5}$$

利用(5)的系数，即代数方程的解，构造如下形式的矩阵

$$L=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1m} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{m1} & L_{m2} & \cdots & L_{mm} \end{bmatrix}, \quad L_{ii}=\begin{bmatrix} -\alpha_1^{ii} & -\alpha_2^{ii} & \cdots & -\alpha_{n_i-1}^{ii} & 1 \\ -\alpha_2^{ii} & -\alpha_3^{ii} & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ -\alpha_{n_i-1}^{ii} & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$L_{ji}=\begin{bmatrix} -\alpha_1^{ij} & -\alpha_2^{ij} & \cdots & -\alpha_{n_j-1}^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2^{ij} & -\alpha_3^{ij} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -\alpha_{n_j-1}^{ij} & 0 & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \quad (i>j)$$

$$L_{ji}=\begin{bmatrix} -\alpha_1^{ij} & -\alpha_2^{ij} & \cdots & -\alpha_{n_i-1}^{ij} & 0 \\ -\alpha_2^{ij} & -\alpha_3^{ij} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ -\alpha_{n_i-1}^{ij} & 0 & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (i>j)$$

定理 3 若线性系统 $[A, B, C]$ 能控，则通过非奇异方阵 $S_2=(S_1^{-1}L)^{-1}$ 可以代数等价地

变换这系统为第II类规范形，$[\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}]$。其中

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \cdots & \widetilde{A}_{1m} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \cdots & \widetilde{A}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{A}_{m1} & \widetilde{A}_{m2} & \cdots & \widetilde{A}_{mm} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{ii}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n_i-1} & \\ 0 & & & \\ \alpha_0^{ii} & \alpha_1^{ii} & \cdots & \alpha_{n_i-1}^{ii} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{ij}=\begin{bmatrix} & 0_{(n_i-1)\times n_j} & \\ \alpha_0^{ij} & \alpha_1^{ij} & \cdots \ \alpha_{n_j-1}^{ij} \end{bmatrix}。$$

在上述矩阵的元素 α_k^{ij} 中，除了在式(5)中出现的指标外，$\alpha_k^{ij}=0$。

$$\widetilde{B}=[e_{n_1} \quad e_{n_1+n_2} \quad \cdots \quad e_{n_1+n_2+\cdots+n_m}]$$

$e_i^T=(0, 0, \cdots 0, 1, 0\cdots 0)$，表示第 i 个分量为1，其余分量都为零的单位向量。

$$\widetilde{C}=\begin{bmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} & \cdots & \widetilde{c}_{1n} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} & \cdots & \widetilde{c}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c}_{p1} & \widetilde{c}_{p2} & \cdots & \widetilde{c}_{pn} \end{bmatrix}=\bar{C}L=CS_1^{-1}L$$

证明： 记 $S_2^{-1}=S_1^{-1}L=[t_{10} \quad t_{11}\cdots t_{1n_1-1}\cdots t_{m1}\cdots t_{mn_m-1}]$

t_{ij} 是 n 维列向量，根据 L 的规定及(5)式，由矩阵乘法运算得

$$t_{i0}=-\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{n_j-1}\alpha_k^{ij}A^{k-1}b_j-\sum_{j=i}^{m}\sum_{k=1}^{n_i-1}\alpha_k^{ij}A^{k-1}b_j+A^{n_i-1}b_i;$$

$$At_{i0}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_0^{ij}b_j;$$

$$At_{i1}=t_{i0}+\sum_{j=1}^{m}\alpha_1^{ij}b_j。$$

一般公式为：

$$At_{ir}=t_{ir-1}+\sum_{j=0}^{m}\alpha_r^{ij}b_j, \ r=1, 2, \cdots n_i-1; \ t_{in_i-1}=b_i \tag{6}$$

利用(6)式，运算时比较各列可得：

$$AS_2^{-1}=[t_{10} \quad t_{11}\cdots t_{1n_1-1}\cdots t_{m0}\cdots t_{mn_m-1}]\widetilde{A}=S_2^{-1}\widetilde{A}$$

即

$$\widetilde{A}=S_2AS_2^{-1} \tag{7}$$

根据同样的运算法则得：

$$S_2^{-1}\widetilde{B}=[t_{1n_1-1} \quad t_{2n_2-1}\cdots t_{mn_m-1}]=B$$

因而得：

$$\widetilde{B}=S_2B \tag{8}$$

最后，利用定理1的结果，可得

$$\widetilde{C}=C\cdot S_2^{-1}=CSL=\bar{C}L \tag{9}$$

由(6)、(7)、(8)，$[\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}]$ 与原系统代数等价，定理(3)证毕。

定理(3)以及公式(5)给出了将系统化为第II类形能控规范形的具体演化矩阵。对能观系统只需应用对偶关系。将定理(2)、(3)的结论应用于对偶系统上。若 $[A, B, C]$ 是能观的线性系统，那么考察对偶系统 $[A^T, C^T, B^T]$。显然，它是一个能控的系统。由定理(2)、(3)将对偶系统化为规范形式，这样就得到相应的能观规范形式。（下转49页）

矩阵的Jordan标准形的变换矩阵的计算方法

复旦大学　蒋尔雄

设 A 是 $n\times n$ 矩阵，J 是它的 Jordan 标准形。所谓变换矩阵就是 $n\times n$ 非奇阵 T，使

$$T^{-1}AT=J$$

关于方阵 A 的 Jordan 标准形的变换矩阵 T 的算法的研究，近年来已有开展（参见[1]），我们这里也提出一个算法。

记 T 的第 i 列为 t_i，即 $T=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，它的各列属于某个 Jordan 链，例如 $n=5$ 时

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

则

$$At_1=\lambda_1t_1 \qquad At_4=\lambda_1t_4$$
$$At_2=\lambda_1t_2+t_1 \qquad At_5=\lambda_1t_5+t_4$$
$$At_3=\lambda_1t_3+t_2$$

这里 t_1, t_2, t_3 是一个 Jordan 链，t_4, t_5 是另一个 Jordan 链。若记 $B=A-\lambda_1I$，则有

$$Bt_3=t_2,\ Bt_2=t_1,\ Bt_1=0$$
$$Bt_5=t_4,\ Bt_4=0$$

由此可以看到，对于上述例子中的矩阵，只要知道 t_3 和 t_5，就可以利用左乘以 B, B^2 等而获得 t_2, t_1 和 t_4。象 t_3, t_5 这样的向量，我们称为 Jordan 链中的最后向量。可以知道对于一般矩阵的情况，也只要知道了每个 Jordan 链的最后向量，依次乘 B, B^2, $\cdots$ 就可以生成这个 Jordan 链的每个向量。我们算法的基本思想就是对于矩阵 A 的各个特征值算出在变换阵中的各个 Jordan 链的最后向量，再生成各个 Jordan 链。

定义　一个非零向量 x，如果存在正整数 l，使得

$$B^{l-1}x\neq0,\quad 而\quad B^lx=0$$

则称 x 为 B 的 l 级根向量

记所有满足 $B^lx=0$ 的向量 x 的全体所构成的线性子空间为 S_l，它是由零向量和所有 1 至 l 级根向量组成。

定义　设 x 是 B 的 l 级根向量，如果对于方程

$$By=x$$

有解 y 存在，显然 y 是 $l+1$ 级根向量，则称 x 为可导出高一级根向量的，简称 x 为可导的，y 称为由 x 导出的。

若 A 的全部不同的特征值已知，设为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_g，我们的算法如下：

0．$1\to m$。

1. 对于 λ_m，记 $B=A-\lambda_m I$

对 B 进行奇异值分解，$B=U\Sigma V$，这里 U，V 是酉阵，Σ 是对角阵，它的为首 r 个对角元非零，后面 $n_1=n-r$ 个对角元为零，r 即为 B 的秩。

2. 由 $BZ=0$ 求出 n_1 个线性无关的基本解组 $Z_1^{(1)}$、$Z_2^{(1)}$、…，$Z_{n_1}^{(1)}$，构成线性空间

$$S_1=[Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \cdots, Z_{n_1}^{(1)}]$$

$$1\to l,\ 转 3$$

3. 将 S_l 进行分解，使

$$S_l=S_{l-1}\oplus V_l\oplus W_l,$$

其中 $S_0=\{0\}$，V_l 是由可导的 l 级根向量组成的线性空间，并且使得对任何可导的 l 级根向量 $Z^{(l)}$ 都有 $Z^{(l)}\in V_l\oplus S_{l-1}$，$W_l$ 是由非可导的 l 级根向量组成，

记 V_l 的基为 $y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \cdots, y_{n_{l+1}}^{(l)}$

W_l 的基为 $\qquad y_{n_{l+1}+1}^{(l)}, y_{n_{l+1}+2}^{(l)}, \cdots, y_{n_l}^{(l)}$。

于是 $\qquad S_l=[y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \cdots, y_{n_l}^{(l)}]\oplus S_{l-1}$

这里 $y_{n_{l+1}+1}^{(l)}, y_{n_{l+1}+2}^{(l)}, \cdots, y_{n_l}^{(l)}$，$n_l-n_{l+1}$ 个向量是它们所属各个 Jordan 链的最后向量。

如果 $V_l=\{0\}$ 则转 5，否则转 4。

4. 将 S_l 扩充成 S_{l+1}，即找 n_{l+1} 个线性无关的 $l+1$ 级根向量 $Z_1^{(l+1)}, Z_2^{(l+1)}, \cdots, Z_{n_{l+1}}^{(l+1)}$，有关系

$$S_{l+1}=[Z_1^{(l+1)}, Z_2^{(l+1)}, \cdots, Z_{n_{l+1}}^{(l+1)}]\oplus S_l。$$

令 $l+1\to l$，转 3。

5. 生成 $By_j^{(k)}, B^2y_j^{(k)}, \cdots, B^{k-1}y_j^{(k)}$

$$j=n_{k+1}+1, n_{k+1}+2, \cdots, n_k \quad k=2, 3, \cdots, l$$

由 $B^{k-1}y_j^{(k)}, B^{k-2}y_j^{(k)}, \cdots, By_j^{(k)}, y_j^{(k)}$,

$$j=n_{k+1}+1, n_{k+1}+2, \cdots, n_k \quad k=2, 3, \cdots, l$$

和 $y_{n_2+1}^{(1)}, y_{n_2+2}^{(1)}, \cdots, y_n^{(1)}$

构成变换阵中对应 λ_m 的各个 Jodran 链，转 6。

6. 若 $m<g$ 则 $m+1\to m$，转 1，否则转 7。

7. 结束。

上述步骤中第 3 步称为“分解”，具体的作法是：在分解 S_l 时，S_1、S_2、…，S_{l-1} 已经分解过，

$$S_l=[Z_1^{(l)}, Z_2^{(l)}, \cdots, Z_{n_l}^{(l)}, y_1^{(l-1)}, \cdots, y_{n_{l-1}}^{(l-1)}, \cdots, y_1^{(1)}, \cdots, y_{n_1}^{(1)}]$$

求常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_l}$ 和 $\beta_i^{(j)}$ $\quad i=1, 2, \cdots, n_j, j=1, 2, \cdots, l-1$，使得方程

$$BZ=\sum_{d=1}^{n_l}\alpha_d Z_d^{(l)}+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i=1}^{n_j}\beta_i^{(j)}y_i^{(j)} \tag{1}$$

有解。因为 $B=U\Sigma V$，因此

$$\Sigma VZ=\sum_{d=1}^{n_l}\alpha_d U^H Z_d^{(l)}+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i=1}^{n_j}\beta_i^{(j)}U^H y_i^{(j)},$$

记向量 $U^H x$ 的第 $r+1$ 个分量至第 n 个分量构成的向量为 $\hat{x}$。因为 $Bx=y_i^{(j)}$ $i=1, 2, \cdots, n_{j+1}$，$j=1, 2, \cdots, l-1$ 有解，因此有

$$\hat{y}_i^{(j)}=0 \quad i=1, 2, \cdots, n_{j+1}, j=1, 2, \cdots, l-1$$

于是要方程(1)有解的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i=n_{j+1}+1}^{n_j}\beta_i^{(j)}\hat{y}_i^{(j)}+\sum_{d=1}^{n_l}\alpha_d\hat{z}_d^{(l)}=0 \tag{2}$$

记向量 $(\beta_{n_2+1}^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}, \cdots, \beta_{n_l+1}^{(l-1)}, \cdots, \beta_{n_{l-1}}^{(l-1)})^T=\beta$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_l})^T=\alpha,$$

记(2)的系数矩阵

$(\hat{y}_{n_2+1}^{(1)}, \cdots, \hat{y}_{n_1}^{(1)}, \hat{y}_{n_3+1}^{(2)}, \cdots, \hat{y}_{n_2}^{(2)}, \cdots, \hat{y}_{n_l+1}^{(l-1)}, \cdots, \hat{y}_{n_{l-1}}^{(l-1)}, \hat{z}_1, \cdots, \hat{z}_{n_l})=B_l$, 于是方程(2)可以简写成

$$B_l\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=0,$$

定理 1 B_l 中为首 n_1-n_l 列

$$\hat{y}_{n_2+1}^{(1)}, \cdots, \hat{y}_{n_1}^{(1)}, \hat{y}_{n_3+1}^{(2)}, \cdots, \hat{y}_{n_2}^{(2)}, \cdots, \hat{y}_{n_l+1}^{(l-1)}, \cdots, \hat{y}_{n_{l-1}}^{(l-1)}$$

是线性无关的。

利用定理 1, 知道存在一个酉阵(n_1-n_l 个初等 Hermite 阵的乘积) Q_l 使

$$Q_lB_l=\begin{pmatrix}\overbrace{G_{11}^{(l)}}^{n_1-n_l} & \overbrace{G_{12}^{(l)}}^{n_l}\\ 0 & G_{22}^{(l)}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n_1-n_l\\ \}n_l\end{matrix}$$

其中 $G_{11}^{(l)}$ 是非奇上三角阵, 于是方程(2)等价于

$$\left.\begin{aligned}G_{11}^{(l)}\beta+G_{12}^{(l)}\alpha=0\\ G_{22}^{(l)}\alpha=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

将 $n_l\times n_l$ 矩阵 $G_{22}^{(l)}$ 奇异值分解

$$G_{22}^{(l)}=U_l\Sigma_lV_l$$

这里 U_l, V_l 是酉阵, Σ_l 是对角阵, 为首 r_l 个对角元非零, 而后面 $n_l-r_l=n_{l+1}$ 个对角元为 0。由此求得整数 n_{l+1}。并且可知 V_l^H 的最后 n_{l+1} 个列向量是方程

$$G_{22}^{(l)}\alpha=0$$

的 n_{l+1} 个解, 它们构成一个基本解系, 记此 n_{l+1} 个解为 α_h, $h=1, 2, \cdots, n_{l+1}$; 再由方程

$$G_{11}^{(l)}\beta+G_{12}^{(l)}\alpha_h=0$$

得到对应的解 β_h, 于是

$$\begin{pmatrix}\beta_h\\ \alpha_h\end{pmatrix}\quad h=1, 2, \cdots, n_{l+1}$$

即为方程(2)的基本解组, 记

$$y_h^{(l)}=(y_{n_2+1}^{(1)}, \cdots, y_{n_1}^{(1)}, \cdots, y_{n_l+1}^{(l-1)}, \cdots, y_{n_{l-1}}^{(l-1)}, Z_1^{(l)}, \cdots, Z_{n_l}^{(l)})\begin{pmatrix}\beta_h\\ \alpha_h\end{pmatrix}$$

$$h=1, 2, \cdots, n_{l+1}$$

它们是 n_{l+1} 个可导的 l 级根向量, 并且是线性无关的。又取矩阵 V_l^H 的第 k 列, $k\leqslant n_l-n_{l+1}$, 记为 α_k, 向量

$$y_{n_{l+1}+k}^{(l)}=(Z_1^{(l)}, \cdots, Z_{n_l}^{(l)})\alpha_k,\ k=1, 2, \cdots, n_l-n_{l+1}$$

和向量 $y_1^{(l)}, \cdots, y_{n_{l+1}}^{(l)}$ 一起构成向量组

$$y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \cdots, y_{n_{l+1}}^{(l)}, y_{n_{l+1}+1}^{(l)}, \cdots, y_{n_l}^{(l)}$$

易知是线性无关的，我们还有

定理 2 任何一个可导的 l 级根向量 $Z^{(l)}$ 必有

$$Z^{(l)} \in [y_1^{(l)}, \cdots, y_{n_{l+1}}^{(l)}] \oplus S_{l-1}。$$

利用定理 2，易知我们已实现了 S_l 的"分解"，其中

$$V_l = [y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \cdots, y_{n_{l+1}}^{(l)}], \quad W_l = [y_{n_{l+1}+1}^{(l)}, \cdots, y_{n_l}^{(l)}]$$

具体计算中为了节省计算量，可以利用

$$Q_{l+1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \underbrace{U_l}_{n_l} \end{pmatrix} Q_l$$

$$G_{11}^{(l+1)} = \begin{pmatrix} G_{11}^{(l)} & \widetilde{G}_{12}^{(l)} \\ 0 & \underbrace{M_{11}^{(l)}}_{n_l - n_{l+1}} \end{pmatrix}$$

第 4 步称为"扩充"，"扩充"的具体作法是由

$$BZ = y_j^{(l)} \quad j = 1, 2, \cdots, n_{l+1}$$

求得特解

$$Z_j^{(l+1)} \quad j = 1, 2, \cdots, n_{l+1}$$

由定理 2 易证

定理 3 $S_{l+1} = [Z_1^{(l+1)}, Z_2^{(l+1)}, \cdots, Z_{n_{l+1}}^{(l+1)}] \oplus S_l$。

最后指出由上述算法逐次确定的正整数 n_k，是 Jordan 标准形的变换阵的各列中对应 λ_m 的 k 级根向量的个数，利用 Jordan 标准形唯一性定理可知第 5 步中所生成的向量构成变换阵中对应特征值 λ_m 的各个 Jordan 链。

参 考 文 献

[1] C. H. Golub and J. H. Wilkinson, Ill-conditioned eigensystems and the compution of the Jordan canonical form, SIAM Revies, Vol. 18, No. 4, (1976).

(上接 45 页)

参 考 文 献

[1] M. J. Denham Canonical forms for identification of multivariable linear systems IEEE Trans. Aut. Comtrol AC-19, No. 6, Dec. (1974).

[2] D. G. Luenberger Canonical forms for linear multivariable systems IEEE Trans. Aut. Control AC-12 June, (1967).

[3] V. M. Popov Invariant description of linear time-invariant controllable systems SIAM J. Control, Vol. 10, No. 2, (1972).

流体力学问题的差分解法

上海科学技术大学　郭本瑜

本文讨论差分解法的一些理论问题

(1) 基于一定的物理定律构造差分格式。一般说来，微分方程解 ξ 具有多种守恒性质，例如解的平均值守恒（一次守恒），解的平方平均值守恒（二次守恒），甚至有无穷多个守恒律。但差分方程解 η 很难同时模拟全部的守恒性。Lax 型格式具有一次守恒性，本文构造了许多二次守恒格式，其数值结果往往较好。又例如可基于特征线概念建立双曲型方程的逆风型格式。本文则直接根据流体力学中的传输律，较精细地描述了流速，并按流速的不同情况，构造了修正逆风格式，后一方法的数值结果往往也较好，且不局限于双曲型方程。

(2) 计算的稳定性。假设 h 是网格步长，L_h 是差分算子，$f(t)$ 是定解条件，$\eta(t)$ 是 η 在 t 时刻的值，$L_h[\eta(t)]=f(t)$，若 f 发生扰动 $\tilde{f}$，η 亦相应发生扰动 $\tilde{\eta}$，通常的稳定性，是指存在常数 $M>0$，使得 $\|\tilde{\eta}\|_\eta\leqslant M\|\tilde{f}\|_f$，其中 $\|\cdot\|_\eta$ 和 $\|\cdot\|_f$ 是适当的范数，但非线性格式很难满足这一条件。为此采用了广义稳定性的概念，即存在与 h 无关的正数 M，N 和常数 s'，使得当 $\|\tilde{f}\|_f\leqslant Nh^{s'}$，$t\leqslant t_0(\|\tilde{f}\|_f)$ 时，$\|\tilde{\eta}(t)\|_\eta\leqslant M\|\tilde{f}\|_f$。并称此类 s' 的下确界为广义稳定性指标 s，可以看出，s 值越小，计算就越稳定，特别若 $L_h[0]=0$，$s\leqslant 0$，则当 $\|\tilde{f}\|_f\leqslant N$ 时，就存在 $\|\tilde{\eta}\|_\eta\leqslant\|\tilde{f}\|_f$。又若格式的形式逼近误差是 $\|\tilde{f}\|_f=0(h^{s_a})$，$s\leqslant s_a$，$s_a>0$，则格式就收敛。近年来，有许多人从事差分格式的优化，他们都致力于增大线性格式的 s_a 值，而设法减少非线性格式的 s 值，不仅增强了计算稳定性，而且当 s_a 较小时（尤其对弱间断解），格式也是收敛的。本文严格估计了许多格式的 s 值的上界，并设法减少 s 值，一般说来，二次守恒格式具有较小的 s 值。

(3) 大梯度解的计算。对于无粘流等大梯度解问题，由于时间方向的离散化，仍会使 $\|\eta\|_\eta$ 或 $\|\tilde{\eta}\|_\eta$ 剧烈地增加，当超过某一定值时，将发生“突变”，即整个非线性计算过程因发生不正常溢出而中断，采用人工粘性项往往可防止它，却又降低了波前分辨度。为了克服这些缺点，构造了许多二次守恒的多步格式。它隐含了一个非线性“滤波”项，自动地调整 $\|\eta\|_\eta$ 的值，并证明了此类格式具有较小的 s 值，又若把二次守恒方法与 Splitting 方法相结合，还可证明在一定条件下，这类格式在通常意义下也是绝对稳定的。

(4) 关于边值条件的影响，对于初-边值问题，由于边界值计算误差的存在与反射，有时会导致计算过程的严重失真或溢出中断。本文对第一、二、三类边值问题，严格估计了此类误差对 $\|\tilde{\eta}\|_\eta$ 的影响，并证明在一定条件下，可以保证计算是稳定的和收敛的。尤其是二次守恒格式，对于初-边值问题，往往具有较小的 s 值。若把各种方法结合起来，尚可证明许多混合边值条件问题的计算稳定性和收敛性。

(5) 关于定常流的计算。第一种方法是直接构造了一些差分格式，并证明在一定条件下，二次守恒格式对一切 h 都存在一个解 η，且 $\|\eta\|_\eta$ 对 h 一致有界。若再补充一些条件，则解是唯一的，计算也是稳定与收敛的。本文还构造了计算这些解的非线性迭代过程，并证明在一定条件下，它至少按几何级数速率收敛。第二种方法是先证明在一定条件下，当 $t\to\infty$ 时，定常定

解条件的非定常问题的解$\xi(t)$，会趋向于相应定常流的解ξ^*。因此可选择适当大的t_0，使$\xi(t_0)$和ξ^*充分接近，然后选择足够小的h，并设法使$\eta(t_0)$与$\xi(t_0)$充分接近。这两步合起来即是动态松弛法，可以看出其收敛性与粘性系数，体力，步长，步长比，边界条件类型，边界形状及计算工具有关。

在本文中共讨论了下列八个问题：

(1) 二维涡度方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\xi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\xi}{\partial x_2}-(\nabla\cdot\nu\nabla)\xi=f_1,\\ \nabla^2\psi-\xi=f_2,\end{cases}$$

其中ξ是绝对涡度，ψ是流函数，ν是运动粘性系数，$\nu\geqslant0$，f_1，f_2是已知函数。

(2) 三维涡度方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}+((\nabla\times\psi)\cdot\nabla)\xi-(\xi\cdot\nabla)(\nabla\times\psi)-(\nabla\cdot\nu\nabla)\xi=f_1,\\ \nabla^2\psi+\xi=f_2\end{cases}$$

其中ξ是涡度向量，ψ是向量势，$\nu\geqslant0$.

(3) n维 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U-(\nabla\cdot\nu\nabla)U+\nabla P=f_1,\\ \nabla\cdot U=0,\end{cases}$$

其中U是速度向量，其分量是$U^{(i)}$，$1\leqslant i\leqslant n$. P是压力与密度之比，$\nu>0$。

(4) 压力方程

$$\nabla^2P+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x_j}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x_i}-\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x_i}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x_j}\right)=f_2,$$

(5) 低 Mach 数流动方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U-(\nabla\cdot\nu\nabla)U+\nabla P=f_1,\quad \nu>0,\\ \dfrac{\partial P}{\partial t}-(U\cdot\nabla)P=0,\end{cases}$$

(6) 动力学——热力学方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U-(\nabla\cdot\nu\nabla)U+\nabla P=f_1,\\ \dfrac{\partial E}{\partial t}+(U\cdot\nabla)E-(\nabla\cdot\mu\nabla)E-\dfrac{\nu}{4}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial x_j}+\dfrac{\partial U^{(j)}}{\partial x_i}\right)^2+f_2,\\ P=f(E)。\end{cases}$$

其中E是单位质量流体的内能，$\mu=\dfrac{K}{\rho C_v}$，K是热传导系数，ρ是密度，C_v是等容比热，$\nu>0$，$\mu\geqslant0$。

(7) 一类非线性方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\psi^p\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^{2r+1}\psi}{\partial x^{2r+1}}+\rho\psi(\psi)^q+\delta\psi=f_1,$$

其中 $\alpha, \beta, \rho, \delta$ 是参数，$\nu \geqslant 0$, p, q, r 是非负整数。适当地选择各种参数，可得到 Hirota 方程，Schrödinger 方程，K、d、V、方程，化学反映扩散方程，等等。

(8) 管导内的燃烧方程。

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 = f_1.$$

对于上述八个问题都建立了二次守恒格式，修正逆风格式，多步格式，Splitting 格式，并对周期解问题及多种初-边值问题严格估计了 s 值的上界，并由此在一定条件下得到稳定性与收敛性，还得到了一些定常流的结果。本文的部分证明及结果可见资料[1～5]，其余结果将今后发表。

参 考 文 献

[1] Kuo Pen-yu(郭本瑜)Scientis sinica, (1977)287～340.
[2] 郭本瑜,《科学通报》(1976)127～181. (1978)424～428.
[3] 郭本瑜,《大气科学》(1978), 103～114.
[4] 郭本瑜,《应用数学学报》(1978), 171～182.
[5] 郭本瑜,《自然》(1978), 82～83, 210～212.

激光核聚变的数值计算

上海科学技术大学　潘仲雄　张卫生　王翼飞
中国科学院　上海光学精密机械研究所　徐至展

为对激光核聚变实验中，正在采用的若干球对称复合结构的聚变靶的激光核聚变全过程进行定量研究，必须对描述激光幅照球对称聚变靶后，靶球等离子体的运动状态的流体力学和热力学方程组[1][3]进行数值计算，我们采用一类显——隐差分格式进行数值计算，效果很好。

一、离散化和差分格式

下面给出离散地模拟等离子体沿流线运动和热流连续的显——隐差分格式，记 $l=j-\frac{1}{2}$，R, u 在结点 j 上定义，其他未知量在结点 l 上定义：

$$
\begin{cases}
(R_j^n)_{\bar{t}}=u_j^{n-1}, \\
(u_j^n)_{\bar{t}}=-(R_j^n)^2(p^n+q^{n-1})_{\hat{m}_j}+\frac{4}{3}(R_j^n)^2\left[\mu_j^{n-1}\rho_j^{n-1}((R^n)^2u^{n-1})_{\hat{m}_j}\right]_{\hat{m}_j}-4R_j^nu_j^{n-1}(\mu^{n-1})_{\hat{m}_j} \\
\rho_l^n=3/((R^n)^3)_{\hat{m}_l}, \\
(C_{ve}+\overline{C_{ve}})_l^{n-\frac{1}{2}}\frac{(TE_l^n)^*-TE_l^{n-1}}{\Delta t}+(BTE)_l^{n-\frac{1}{2}}\rho_{\bar{l}} \\
\quad =\frac{1}{\Delta m_l}\Big[\left(\frac{R_{j+1}^n+R_{j+1}^{n-1}}{2}\right)^2\chi_{e_j}^{n-1}\frac{TE_{l+1}^{n-1}-TE_l^{n-1}}{R_{j+2}^{n-1}-R_j^{n-1}}-\left(\frac{R_j^n+R_j^{n-1}}{2}\right)^2 \\
\quad\quad \cdot\chi_{e_j}^{n-1}\cdot\frac{TE_l^{n-1}-TE_{l-1}^{n-1}}{R_{j+1}^{n-1}-R_{j-1}^{n-1}}\Big]+L_h(TE^*,\ TI^*), \\
(C_{ve}+\overline{C_{ve}})_l^{n-\frac{1}{2}}\frac{TE_l^n-\frac{1}{2}((TE_l^n)^*+TE_l^{n-1})}{\frac{1}{2}\Delta t}+(BTE)_l^{n-\frac{1}{2}}\rho_{\bar{l}} \\
\quad =\frac{1}{\Delta m_l}\Big[\left(\frac{R_{j+1}^n+R_{j+1}^{n-1}}{2}\right)^2\cdot\chi_{e_j}^{n-1}\cdot\frac{((TE_{l+1}^n)^*-TE_l^n}{R_{j+2}^n-R_j^n} \\
\quad\quad -\left(\frac{R_j^n+R_j^{n-1}}{2}\right)^2\cdot\chi_{e_j}^{n-1}\cdot\frac{TE_l^n-(TE_{l-1}^n)^*}{R_{j+1}^n-R_{j-1}^n}\Big]+L_h(TE,\ TI)。 \\
PE_l^n=f_1(TE_l^n,\ \rho_l^n), \\
PI_l^n=f_2(TI_l^n,\ \rho_l^n)。
\end{cases}
$$

关于 TI 的方程与 TE 类似地离散。其中 $\Delta t\equiv\Delta t^{n-\frac{1}{2}}$，$L_h(TE^*,\ TI^*)$ 为低阶项的离散形式：

$$
L_h(TE^*,\ TI^*)=\frac{PE_l^{n-1}}{(\rho_l^n)^2}(\rho_l^n)_{\bar{t}}+\left(\frac{C_{vi}}{t_{eq}}\right)_l^{n-\frac{1}{2}}((TI_l^n)^*-(TE_l^n)^*)+(s_{eL})_l^{n-\frac{1}{2}}
$$
$$
+(s_{ef})_l^{n-\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}\left[((R^n)^2u^{n-1})_{\hat{m}_l}\right]^2\mu e_l^{n-1}\cdot\rho_l^{n-1}-4\mu e_l^{n-1}\cdot(R^n(u^{n-1})^2)_{\hat{m}_l}。
$$

对 TE, TI 的方程局部予估——校正一次，既提高了显格式的稳定性，对解又起了平滑作用，另外整个系统是显式求解，特别方程系数形成比较复杂时计算速度和效果均比较好。

二、局部稳定性

检验局部稳定性条件，可以排除不稳定的格式，并对 Δt 的选取作出估计。为此对差分方程各未知量引进微扰，并用系数冻结法，可以对过渡矩阵的特征值进行估计，如记

$$K_e=\frac{R^4\rho\chi_e}{C_{ve}},\ K_i=\frac{R^4\rho\chi_i}{C_{vi}},\ \alpha=\frac{k\theta}{2},\ C_0^2=\frac{PE+PI}{\rho}$$

则可得到下面的结论：

结论 1 若 $\frac{\Delta t}{\Delta m^2}=r=0(1)$ 时，过渡矩阵特征值满足：

$$\lambda^2(1-\lambda)\left(1-\lambda-\frac{4}{3}R^2\mu\rho\cdot 4\sin^2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+K_e\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\cos 2\alpha\right)\left(1-K_e\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\sin^2\alpha\right)\right.$$
$$\left.-\lambda\left(1+K_e\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+K_i\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\cos 2\alpha\right)\left(1-K_i\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\sin^2\alpha\right)-\lambda\left(1+K_i\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\right)\right]$$
$$=0(\Delta t)。$$

故当 $\mu\neq 0$ 时，稳定性的必要条件为：

$$\frac{4}{3}R^4\rho\mu\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\leqslant\frac{1}{2},\quad K_e\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\leqslant 1,\quad K_i\frac{\Delta t}{\Delta m^2}\leqslant 1。$$

结论 2 当 $\mu=0$ 时，若 $\frac{\Delta t}{\Delta m}=0(1)$ 则由

$$\left[(1-\lambda)^2+\frac{R^4\rho^2C_0^2\Delta t^2}{\Delta m^2}\cdot 4\sin^2\alpha\cdot\lambda\right]\cdot\phi_4(\lambda)=0(\Delta t)$$

其中 $\phi_4(\lambda)$ 为 λ 的四次多项式，故稳定性的条件为：

$$R^2\rho C_0\frac{\Delta t}{\Delta m}\leqslant 1。$$

一般，流体力学方程的稳定条件起着主导作用。在热核反应开始以后，其他条件才起作用，故选 Δt 一般为：

结论 3 选取时间步长 Δt，必须满足

$$\Delta t\leqslant\min\left\{\frac{\Delta m}{R^2\rho C_0},\ \frac{\Delta m^2}{K_e},\ \frac{\Delta m^2}{K_i},\ \frac{3}{8}\ \frac{\Delta m^2}{R^4\mu\rho}\right\}$$

三、计算结果和可靠性

下面是一个示例的计算结果：

物理量 / 类型	$T_{f_i}(K_{ev})$	$T_{f_e}(K_{ev})$	C_{max}	t_I(ps)	$\langle R_{gf}\rangle$cm·sec^{-1}	$N_n(14.07)$
计算结果	2.36	1.81	10^3	207	1.2×10^7	5×10^7
实验值	2.5	—	$\sim10^3$	—	—	$\sim2\times10^7$

示例中玻璃球壳直径为 55 μm，球壳壁厚 0.7 μm，玻壳初始密度 2.2 g/cm³，燃料气体初始密度 $\rho_{f_0}=2\times10^{-3}$ g/cm³，激光脉冲为方波，宽度 45 ps，能量 3.4J 全吸收。表中 $T_{I_f}T_{f_e}$ 分别为燃料的离子、电子温度，C_{max} 为气体最大压缩比，t_I 为最大向心聚爆时间，$\langle R_{gf}\rangle$ 为玻璃——气体界面的向心聚爆平均速度，$N_{n(14.07)}$ 为 DT 反应所产生，能量为 14.07M_{ev} 的中子数目。同时还可以根据不同时刻能量分配检验结果的正确性：

t	E	I	S_{er}	S_{eL}	E_I	eps
0.403	0.1043×10^5	0.1427×10^5	-0.1737×10^2	0.2425×10^5	0.1594×10^4	1.9%
0.520	0.2208×10^6	0.1777×10^6	-0.7707×10^3	0.3919×10^6	0.6695×10^4	1.8%
23.505	0.9854×10^6	0.4385×10^6	-0.4766×10^4	0.1413×10^7	0.1430×10^5	1.1%
48.309	0.2136×10^7	0.5714×10^6	-0.8764×10^4	0.27×10^7	0.2059×10^5	0.64%
88.024	0.2542×10^7	0.1605×10^6	-0.1434×10^4	0.27×10^7	0.2724×10^5	0.4%
…	…	…	…	…	…	…

其中 t 为时间 (ps)，I 为系统的内能和电离能 (erg)，E 为动能，s_{er} 为辐射能，s_{eL} 为激光能。其他结果见[2]。

参加本工作的还有沈文达、张文琦等同志。

参 考 文 献

［1］ 徐至展、沈文达、潘仲雄、张卫生，《上海科大学报》1 (1978), 14.
［2］ 徐至展、沈文达、张文琦、潘仲雄，《科学通报》2 (1979), 263.
［3］ 徐至展等，《激光》5～6, (1978).

无穷空间问题的数值解法及其在酶作用原理研究中的应用*

上海计算技术研究所　李子才

本文首先给出抛物型方程的强极值原理，然后讨论定义域为无穷空间问题的数值解法，最后应用于酶作用原理的研究。现将主要的结果呈述如下：

设 Ω 是 n 维 Enclidean 空间中的有界域，在 Ω 内考虑一般的抛物型方程：

$$u_t=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}-cu+F, \tag{1}$$

式中记号 $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$，$u_{x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，$u_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$；系数 a_{ij}、b_i、c 和自由项 F 均是时间 t 和空间坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续有界函数；系数 $c\geqslant 0$，而 $a_{ij}=a_{ji}$，并对任何实数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 均有不等式成立：

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\quad(\text{常数 } m>0)。 \tag{2}$$

定义微分算子 $\hat{\mathscr{L}}$：

$$\hat{\mathscr{L}}u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}-cu-u_t, \tag{3}$$

设 w 是满足下述模型问题的解：

$$\begin{cases}\hat{\mathscr{L}}w=-F(t,x) & (t>0,\ x\in V), & (4)\\ w=f(t,x) & (t>0,\ x\in\Gamma), & (5)\\ w|_{t=0}=g(x) & (x\in V), & (6)\end{cases}$$

式中有界开空间 $U\in\Omega$；而 Γ 是空间 V 的边界；记号 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$；$F(t,x)$、$f(t,x)$ 和 $g(x)$ 均是变量（t 或 x）的连续有界函数；而 $f(0,x)=g(x)\ (x\in\Gamma)$。于是我们可证[1]：

定理 1　（强极值原理）。设 G_s 是 V 内一个开球空间，点 P_0 位在 G_s 的边界上，函数 w 在 G_s 内具有二阶连续偏导数，而在 $G_s\cup P_0$ 上连续，且满足方程(4)，系数 a_{ij}、b_i 和 $c(\geqslant 0)$ 连续有界，并满足不等式(2)。若 $F(t,x)\leqslant 0$ 且在时刻 $t\ (0<t\leqslant t^*)$ 正函数 $w(t,P_0)$ 满足不等式：

$$w(t,P_0)>w(t',P)\quad(0\leqslant t'\leqslant t,\ P\in G_s), \tag{7}$$

则在 (t,P_0) 处沿 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的导数（假设存在）为正，即

$$\left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_{(t,P_0)}>0, \tag{8}$$

这里在 $n+1$ 维区域 $[0,T]\times\Omega$ 中矢量

$$\boldsymbol{\nu}=(\delta\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{l}), \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{t}$ 是单位时间向量，δ 是任何有界实数；$\boldsymbol{l}$ 是 n 维空间 Ω 中与球 G_s 表面外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 成锐角的单位向量，即

* 本文曾在 1978 年全国第三届数学年会上报告过。

$$\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) > 0, \tag{10}$$

现在，讨论酶 底物反应体系中出现的扩散方程：

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} = De^{U/kT}\nabla\cdot(e^{-U/kT}\nabla c^*), \tag{11}$$

式中 ∇ 是 Hamilton 算子；D 是扩散系数；U 是酶与底物分子间的作用位能；k 是 Boltzmann 常数；T 是绝对温度；而 c^* 与底物分子浓度 c 之间的关系是 $c^* = e^{U/kT}c$。方程(11)所相应的边界条件和初始条件是(见图1)[2]：

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial c^*}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0 \quad ((\theta, \varphi) \in S_b), & (12) \\ \left.\dfrac{\partial c^*}{\partial r}\right|_{r=R_0} = \dfrac{z^*}{D} c^* \quad \begin{pmatrix} (\theta, \varphi) \in S_a^{(\lambda)} \\ \lambda = 1, 2, \cdots, \Lambda \end{pmatrix}, & (13) \\ c^*|_{r\to\infty} = c_0, & (14) \\ c^*|_{t=0} = e^{U/kT}c_0, & (15) \end{cases}$$

式中 z^* 是与结合反应活化能 ε_a 有关的常数。

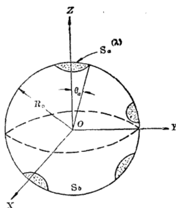


图 具有 Λ 个活性中心的酶分子表面
($S_a^{(\lambda)}$ 是第 λ 个活性表面，S_b 是活性表面以外的大蛋白体表面)

下面只讨论稳态$\left(\text{即} \dfrac{\partial c^*}{\partial t} = 0\right)$时的情形，并限定酶分子只有一个活性中心，则方程(11)～(15)可简化为(见图)：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(e^{-U/kT}r^2\dfrac{\partial c^*}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{-U/kT}\sin\theta\dfrac{\partial c^*}{\partial \theta}\right) = 0, & (16) \\ \left.\dfrac{\partial c^*}{\partial r}\right|_{r=R_0} = \dfrac{z^*}{D} c_0 \quad (0 \leqslant \theta < \theta_a), & (17) \\ \left.\dfrac{\partial c^*}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0 \quad (\theta_a < \theta \leqslant \pi), & (18) \\ c^*|_{r\to\infty} = c_0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)。 & (19) \end{cases}$$

方程(16)～(19)也可等价地叙述为：

c^* 是满足条件(19)的所有 $K'(G_\infty)$(即使能量 $J(c^*)$ 有界)类中，使能量

$$J = J(c^*) = \pi D \iint_{S_\infty} p(r, \theta)(c_x^{*2} + c_y^{*2})y\,ds + \pi z^* \int_{l_{0a}} p(R_0, \theta)c^{*2}y\,dl \tag{20}$$

取极小的解，这里 S_∞ 是无穷空间 G_∞ 的横截面；l_{0a} 是活性表面 S_a 的横切线；而 $p(r, \theta) = e^{-U/kT}$。

按照实际的物理含义，U 是足够光滑的，且当

$$r \geqslant R^* > R_0$$

时可以近似为零，即 $U = 0$。此时在 $r \geqslant R^*$ 的无穷区域内，解 c^* 为

$$c^*(r, \theta) = (1 - R^*/r)c_0 + \sum_{l=0}^{\infty} D_l^*(R^*/r)^{l+1}P_l(\cos\theta),$$

式中 $P_l(x)$ 是 Legendre 多项式；系数

$$D_l^* = \frac{2l+1}{2}\int_0^\pi c^*(R^*, \theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta。$$

于是，当 $r \geqslant R \geqslant R^*$ 时，有近似式：

$$c^*(r, \theta) \approx u(r, \theta) = c_0 + \sum_{l=0}^{L} \bar{D}_l(R^*/r)^{l+1}P_l(\cos\theta), \tag{21}$$

式中 $\tilde{D}_0=D_0^*-C_0$, $\tilde{D}_l=D_l^*(1\leqslant l\leqslant L)$。因而解 u 将使

$$J=J(u)=\pi D\iint_S P(r,\ \theta)(u_x^2+u_y^2)y\,ds$$

$$+\pi z^*\int_{l_{\theta_0}}P(R_0,\theta)u^2y\,ds+2\pi D\sum_{l=0}^{L}\frac{l+1}{(2l+1)}D_l^{*2}(R^*/R)^{2(l+1)}R \tag{22}$$

取极小,这里 s 是空间 G 的横剖面。显然可用 u 来近似 c^*。

在有界区域 s 内,可按通常有限元法剖分区域 s,并选取分片低阶插值多项式 V 为可取函数。取近似解形如

$$\tilde{U}=\begin{cases}V & (r<R),\\ f_L(\tilde{D}_l) & (r\geqslant R),\end{cases} \tag{23}$$

式中函数 $$f_L(\tilde{D}_l)=c_0+\sum_{l=0}^{L}\tilde{D}_l(R^*/r)^{(l+1)}P_l(\cos\theta)。$$

显然,在无穷区域($r\geqslant R$)中解 $\tilde{U}$ 是解析函数 $f(\tilde{D}_l)$,同于原始能量法(即 Ritz-Galerkin 法)[3],在有限区域($R_0\leqslant r\leqslant R$)中是同于有限元法[4,5]。在这两区域的交界面结点 $(R,\ \theta_j)$ 上函数 $\tilde{U}$ 连续。这里,已将原始能量法与有限元法结合使用了,称之为原始能量——有限元结合法。这种方法能够充分利用原始能量法与有限元法所独有的优点,取长补短,从而大大地节省计算量。

若剖分单元为三角形,V 为线性插值函数,令能量 $J(\tilde{U})$ 为极小,就得到代数方程组

$$AX=b,$$

式中矩阵 A 是对称正定的,且也有很好的稀疏性。于是可用变带宽的改进平方根法求解。此外,我们可证[6]:

定理 2 设可取函数为(23)式,其中 V 是分片线性插值函数,则用原始能量——有限元结合法算得的解 $\tilde{U}$ 有如下误差估计式:

$$J(\tilde{U}-c^*)\leqslant K_1\Delta h^2/\sin^2(\delta_{\min})+K_2\varepsilon(L)(R^*/R)^{2L+3}+K_3\Delta h^2L^2$$

式中 Δh 和 $\delta_{\min}$ 分别是三角单元的最大边长和最小内角; K_1、K_2 和 K_3 是有界常数;而小量 $\varepsilon(L)\to 0$(当 $L\to\infty$ 时)。

最后,将上述方法用来计算酶——底物反应体系中的结合反应速率:

$$k(c^*)=\frac{D}{c_0}\iint_{S_{R_0}}e^{-U/kT}\frac{\partial c^*}{\partial r}ds=\frac{z^*}{c_0}\iint_{S_a}e^{-U/kT}c^*\,ds, \tag{24}$$

式中 S_{R_0} 是酶分子球表面($r=R_0$),S_a 是活性表面。由定理 2 得到:

推论 将近似算得的反应速率记为

$$\tilde{k}=\frac{z^*}{c_0}\iint_{S_a}e^{-U/kT}\tilde{U}\,ds,$$

则有如下误差估计式:

$$|k(c^*)-\tilde{k}|\leqslant K_1\Delta h^2/\sin^2(\delta_{\min})+K_2\varepsilon(L)(R^*/R)^{2L+3}+K_3\Delta h^2L^2。$$

显然,当 $\delta_{\min}$ 有下界且 $R^*<R$ 时,只要 $\Delta h\to 0$、$\Delta hL\to 0$ 且 $L\to\infty$,近似反应速率 $\tilde{k}\to k(c^*)$。

按照扩散的规律,先解方程(11)~(15)或(16)~(19),再用公式(24)求得近似反应速率。我们在资料[7]中首次算得碳酸酐酶——H_2CO_3 的扩散控制反应速率常数的最大限度,达到 10^{10} 升/克分子·秒,与实验结果完全一致,从而解释了国际上曾一直难以解释的实验现象。其意义可见《文汇报》[8]。(下转 60 页)

自反馈静压轴承系统的全局稳定性

北京工业大学　邓乃扬
上海师范学院　沈家骐

本文首先建立了自反馈静压轴承的数学模型

$$\ddot{\delta}+\Psi(\delta)\dot{\delta}+g(\delta)=c_0w_0(t),$$

其中

$$\Psi(\delta)=c_1\left[\frac{1}{w(\delta,\ \theta_1)}+\frac{1}{w(-\delta,\ \theta_1)}\right]+c_2\left[\frac{1}{w(\delta,\ \varphi_1)}+\frac{1}{w(-\delta,\ \varphi_1)}\right]$$
$$+c_3[v(\delta,\ \theta_0)+v(-\delta,\ \theta_0)]+c_4[v(\delta,\ \varphi_0)+v(-\delta,\ \varphi_0)]$$
$$+[q(-\delta,\ \varphi_1,\ \varphi_0)+Q(\delta,\ \theta_1,\ \theta_0)]^{-1}+[q(\delta,\ \varphi_1,\ \varphi_0)+Q(-\delta,\ \theta_1,\ \theta_0)]^{-1},$$

$$g(\delta)=c_5\left[\left(1+\frac{Q(\delta,\ \theta_1,\ \theta_0)}{q(-\delta,\ \varphi_1,\ \varphi_0)}\right)^{-1}-\left(1+\frac{Q(-\delta,\ \theta_1,\ \theta_0)}{q(\delta,\ \varphi_1,\ \varphi_0)}\right)^{-1}\right],$$

而

$$q(\delta,\ \varphi,\ \psi)=(C_6w(\delta,\ \varphi)+c_7u(\delta,\ \psi),$$
$$Q(\delta,\ \varphi,\ \psi)=c_8w(\delta,\ \varphi)+c_7u(\delta,\ \psi),$$
$$u(\delta,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}w(\delta,\ \varphi)d\varphi,\quad v(\delta,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{w(\delta,\ \varphi)}d\varphi,$$
$$w(\delta,\ \varphi)=(1-\delta\cos\varphi)^3,$$

这里的 $c_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 和 $\theta_0,\ \theta_1,\ \varphi_0,\ \varphi_1$, 是系统的参数，满足

$$c_i>0,\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ 8),\ 0<\theta_0,\ \theta_1,\ \varphi_0,\ \varphi_1<\frac{\pi}{4},$$

然后引入

辅助定理　考虑系统

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ x_2\cdots x_n),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

设 $\mathscr{D}$ 为相空间中某一包含原点 O 的开域。$X_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 在 $\mathscr{D}$ 内连续，在 $\mathscr{D}$ 内的任意闭域上满足 Lipschitz 条件，且有 $X_i(0,\ 0,\ \cdots 0)=0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，若

i) 存在 $\mathscr{D}$ 上的定正函数 $v(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，它按系统计算出的微商 $\dot{v}\leqslant 0$;

ii) 使 $\dot{v}=0$ 的集合，除原点 O 外，不包含系统的完整轨线；

iii) 对于系统的任一轨线，存在一个 $\mathscr{D}$ 内的有界闭域，使得该轨线的正半轨永远不超出这个有界闭域；

则在区域 $\mathscr{D}$ 上，系统的另解全局稳定。

在辅助定理的基础上证明了

定理　考虑系统

$$\ddot{\eta}+\Phi(\eta)\dot{\eta}+f(\eta)=0$$

设 Φ 和 f 都是开区间 (a, b) 上的连续函数 $(a<0<b)$，且在 (a, b) 的任意闭子区间上，f 满足 Lipschitz 条件，若

$$\Phi(\eta)>0; \quad \lim_{\eta\to a}\int_0^{\eta}\Phi(\eta)d\eta=-\infty; \quad \lim_{\eta\to b}\int_0^{\eta}\Phi(\eta)d\eta=\infty$$

$$f(0)=0; \quad 当\ \eta\neq 0\ 时,\ \eta f(\eta)>0,$$

则系统的另解在区域 $\{c<\eta<b;\ -\infty<\dot{\eta}<\infty\}$ 上全局稳定。

最后把上述定理应用于自反馈静压轴承中，证明了轴受常载荷时，系统平衡位置是稳定的。

参考文献

[1] 静压轴承研究小组，薄膜反馈液体静压轴承动态特性的分析，《北京工业大学学报》，1977 年第 1 期，第 49~66 页。

[2] Е. А. Барбашин, Функции Ляпунова (1970).

(上接 58 页)

参考文献

[1] 李子才，抛物型方程的强极值原理及其应用(未发表)。

[2] 李子才、周国城，《中国科学》2 (1977) 128~145.

[3] 米赫林，С. Г. 数学物理中的直接方法(中译本)，(1960)高等教育出版社。

[4] Strang, G. and Fix, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, (1973) Prentice-Hall INC Englewood Cliffs N. J.

[5] 冯康，有限元方法，数学的实践与认识，54~61(1974 年 4 期)，42~54(1975 年 1 期)，51~73(1975 年 2 期)。

[6] 李子才，无穷空间问题的结合法(未发表)。

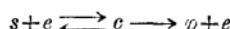
[7] 李子才、周国城，Scientia Sinica, 19 (1976), 117~136.

[8] 《文汇报》记者，远缘交亲结蓓蕾，《文汇报》，1978, 8, 27。

化学反应方程中的奇摄动问题

华东师范大学　陈美康　徐钧涛

描述酶化学反应



$$s+e \rightleftarrows c \longrightarrow p+e$$

(其中 s: 基质, e: 酶, c: 复合体, p: 生成物)的微分方程经过无量纲化后为

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}=-s+(s+k-\lambda)c \\ \varepsilon\dfrac{dc}{dt}=s-(s+k)c \\ s(0)=1,\ c(0)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 ε 为小参数。但是在初始阶段($t=0$ 附近), c 值自 0 急剧上升, $\varepsilon\dfrac{dc}{dt}$ 不可忽视, 这是一个奇摄动问题。在 $t=0$ 附近存在一个边界层, 一般可按匹配方法[1]求解, 即在(1)中令 $\varepsilon=0$, 求得所谓外部解, 再在边界层内另找适合初始条件的内部解与外部解相匹配。按此方法计算相当繁复。

本文利用边界层方法[2]求得了(1)的渐近解。解由两部分组成: 用原时间变量 t 表示的外部解: $\tilde{s}(t;\varepsilon)$ 和 $\tilde{c}(t;\varepsilon)$ 以及用伸展时间变量 $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ 表示的边界层校正函数: $m(\tau;\varepsilon)$ 和 $n(\tau;\varepsilon)$, 这里 $\tilde{s}(t;\varepsilon)$、$\tilde{c}(t;\varepsilon)$、$m(\tau;\varepsilon)$、$n(\tau;\varepsilon)$ 均取为 ε 的幂级数:

$$\begin{cases} \tilde{s}(t;\ \varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{s}_j(t)\varepsilon^j, \\ \tilde{c}(t;\ \varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{c}_j(t)\varepsilon^j, \\ m(\tau;\ \varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}m_j(\tau)\varepsilon^j, \\ n(\tau;\ \varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}n_j(\tau)\varepsilon^j, \end{cases} \tag{2}$$

所求的形式解为:

$$\begin{cases} s(t;\ \varepsilon)=\tilde{s}(t;\ \varepsilon)+\varepsilon m(\tau;\ \varepsilon), \\ c(t;\ \varepsilon)=\tilde{c}(t;\ \varepsilon)+n(\tau;\ \varepsilon)。 \end{cases} \tag{3}$$

把(2)、(3)分别代入原方程组(1), 按一般摄动方法, 比较 ε 的同次幂的系数, 根据定解条件

$$\begin{cases} s(0;\varepsilon)=1, \quad c(0;\varepsilon)=0, \\ m_j(\tau)\to 0 \quad (\tau\to\infty), \\ n_j(\tau)\to 0 \quad (\tau\to\infty), \end{cases} \tag{4}$$

依次确定幂级数中各项的系数 $\tilde{s}_j$、$\tilde{c}_j$、m_j 和 n_j。

这个方法的特点在于引入了边界层校正函数 $m(\tau)$ 和 $n(\tau)$。对校正函数的幂级数展开式，(4)式意味着在边界层外，当 ε 趋于 0 时，形式解(3)趋于外部解(2)，即它们仅在边界层内起作用。另外，由于外部解不必满足方程组(1)在 $t=0$ 的初始条件，因此要利用函数 $m(\tau;\varepsilon)$ 和 $n(\tau;\varepsilon)$ 在边界层内进行校正。如(1)的零次外部解 $\tilde{c}_0(0)\neq 0$，则应取 $n_0(0)=-\tilde{c}_0(0)$，作为 $n_0(\tau)$ 的定解条件，这样形式解

$$\tilde{c}_0(t)+n_0(\tau)$$

就适合(1)，特别是 $c(0;\varepsilon)=0$。同样在确定一次外部解 $\tilde{s}_1(t)$ 时，初始条件暂缺，它也是利用已求得的校正函数 $m_0(\tau)$ 取

$$\tilde{s}_1(0)=-m_0(0)$$

提供的。

如上可以逐次求得(1)的零次和一次近似解分别为：

$$\begin{cases} s\approx\tilde{s}_0=-k\ln\tilde{s}_0-\lambda t+1, \\ c\approx\tilde{c}_0+n_0=\dfrac{\tilde{s}_0}{\tilde{s}_0+k}-\dfrac{1}{1+k}e^{-(1+k)\frac{\tau}{\varepsilon}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\approx\tilde{s}_0+\varepsilon\tilde{s}_1+\varepsilon m_0 \\ \quad=\tilde{s}_0+\dfrac{\varepsilon\tilde{s}_0}{\tilde{s}_0+k}\left[\dfrac{k-\lambda}{k}\ln\dfrac{\tilde{s}_0+k}{\tilde{s}_0(1+k)}+\dfrac{\lambda-\tilde{s}_0-k}{\tilde{s}_0+k}\right] \\ \quad\quad+\dfrac{\varepsilon(1+k-\lambda)}{(1+k)^2}e^{-(1+k)\frac{t}{\varepsilon}}, \\ c\approx\tilde{c}_0+n_0+\varepsilon\tilde{c}_1+\varepsilon n_1=\dfrac{\tilde{s}_0}{\tilde{s}_0+k}-\dfrac{1}{1+k}e^{(1+k)\frac{t}{\varepsilon}} \\ \quad\quad+\dfrac{\varepsilon}{(\tilde{s}_0+k)^3}\left[\dfrac{2k\tilde{s}_0\lambda}{\tilde{s}_0+k}-k\tilde{s}_0+\tilde{s}_0(k-\lambda)\ln\dfrac{\tilde{s}_0+k}{\tilde{s}_0(1+k)}\right] \\ \quad\quad+\dfrac{\varepsilon}{(1+k)^4}e^{-(1+k)\frac{t}{\varepsilon}}\left[(1+2k+k^2-\lambda-2\lambda k)+(1-k^2(\lambda-k-1)\dfrac{t}{\varepsilon}-(1+k-\lambda)e^{-(1+t)\frac{t}{\varepsilon}}\right] \end{cases}$$

与[3]中利用匹配方法所得结果完全一致。

关于形式解的渐近性质[2]中也有一般讨论，给出了当(1)具有某些条件下在有限时间区间上形式解一致有效的定理。

边界层方法思路清晰，实际意义明了，且可用于更一般的非线性问题，包括边值问题的求解，这样就为研究各种类型的化学反应问题提供了一种新的有效工具。

参 考 文 献

[1] Nayfeh A. H., Perturbation Methods (1973).

[2] O'Malley R. E., Boundary layer methods for nonlinear initial value problems, SIAM Review, 13 (1971), 425～434.

[3] Lin C. C. and Segel I. A., Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences, (1974).

关于非线性规划中直接搜索法的理论

复旦大学　俞文魮

在非线性规划中，直接搜索法是常用的一类算法，但它的理论至今甚为缺乏。对此，我们进行了若干探讨，建立了一个统一的收敛定理，可包括 Hooke-Jeeves 方法、单纯形调优法等在内。

一、正基的性质与多面体的界限估计

设 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 为 R^n 中 m 个向量组成的集合，当 $\lambda_i\geqslant 0$ 时，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i$ 称为 B 的正组合。如 B 中每个向量均不能表示为 B 中其他向量的正组合，则称 B 为正独立的。如 R^n 中任一向量均可表示为 B 中向量的正组合，则称 B 为 R^n 的正生成集。正独立的正生成集称为 R^n 的正基。

定义　设 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，$m\geqslant n+1$，是 R^n 的正生成集，$\|b_i\|=1$，考察 B 中一切线性无关(按通常意义)的 n 个向量构成的行列式绝对值，取其最小值，称为 B 的生成测度，记为 $m(B)$。

定理　设 $A^i=\{a_1^i, a_2^i, \cdots, a_m^i\}$ 为 R^n 的正基，$\|a_j^i\|=1$，又设 $m(A^i)\geqslant m_0>0$，其中 m_0 为正常数，则 $\{A^i\}(i=1, 2, 3, \cdots)$ 必存在一个子序列，使其每个向量序列收敛于 $a_j(j=1, 2, \cdots, m)$，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 亦为正基，且成立 $m(A)\geqslant m_0$。

定理　设 R^n 中多面形 $P=\{x|Ax\leqslant c\}$ 为非空，A^T 的列向量组成的集合仍记为 $A^T=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$；$\|a_i\|=1$，则成立下列结论：

(1) 当且仅当 A^T 为正生成集时，P 为有界，即 P 为多面体。

(2) A^T 为正生成集时，P 中一切点 x 满足

$$\|x\|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{m(A^T)}\cdot\|c\|,$$

其中 $m(A^T)$ 为 A^T 的生成测度。

二、单纯形的回路正基与路径正基

为了分析单纯形调优法的需要，我们研究了与单纯形相联系的正基。

定理　从 R^n 的单纯形上任一顶点出发经过其他各顶点一次而最终回到该顶点的 $n+1$ 个边，其单位向量必组成正基，称为回路正基。

定理　从 R^n 的单纯形上任一顶点出发经过其他各顶点一次而最终回到重心的 $n+1$ 个边，其单位向量必组成正基，称为路径正基。

定理　设 B 为 R^n 上正规单纯形的任何回路正基，C 为 R^n 上正规单纯形的任何路径正基，

则生成测度 $m(B)$ 与 $m(C)$ 成立

$$m(B)=2^{-\frac{n}{2}}\cdot(n+1)^{\frac{1}{2}},\qquad m(C)=2^{-\frac{n-1}{2}}\cdot n^{-\frac{1}{2}}。$$

定义 设 $S=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为 R^n 的单纯形，除 x_k 以外，其余点的重心记为 x_c，令 $\bar{x}_k=2x_c-x_k$，以 $\bar{x}_k$ 代替 S 中 x_k，得到另一单纯形 S_r，称为 S 的反映单纯形。

定义 设正数 $\theta<1$，$S=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为 R^n 的单纯形，对某 k 及任意的 $i\neq k$，令 $\bar{x}_i=x_k+\theta(x_i-x_k)$，并以 $\bar{x}_i$ 代替 S 中 x_i，得到另一单纯形 S_c，称为 S 的紧缩单纯形。

定义 设 $\{S^i\}(i=1, 2, 3, \cdots)$ 为 R^n 的单纯形序列，如果 S^{i+1} 或是 S^i 的反映单纯形，或是 S^i 的紧缩单纯形，则 $\{S^i\}$ 称为单纯形反映紧缩序列。

定理 设 $\{S^i\}$ 为 R^n 的单纯形反映紧缩序列，则对 S^i 的任何回路正基 B^i 与任何路径正基 $C^i(i=1, 2, 3, \cdots)$，其生成测度 $m(B^i)$ 与 $m(C^i)$ 具有公共的正下界。

三、定步长下山法的收敛定理

能够获得定步长下山点列(见以下定义)的算法被称为定步长下山法，它将综合常见的轴向搜索法、Hooke-Jeeves 方法、单纯形调优法等在内。

定义 设 $f(x)$ 为 R^n 上函数，$\delta_i>0$，$\varepsilon_i\geqslant0$，$\delta_i\to0$，$\varepsilon_i/\delta_i\to0$，$\{A^i\}$ 为 R^n 的正基序列，$A^i=\{a_1^i, a_2^i, \cdots, a_m^i\}$，$\|a_j^i\|=1$，$\{x_k\}$ 为 R^n 的无限点列，它满足：

(a) 对任意 $k\in I=\{1, 2, 3, \cdots\}$，均有 $f(x_{k+1})\leqslant f(x_k)$。

(b) 存在有限或无限的集合 $K=\{k(1), k(2), \cdots, k(i), \cdots\}\subset I$，且与每个 $z_i=x_{k(i)}$ 相应，存在 y_j^i 与 λ_{ij}，满足：

$$\|y_j^i-z_i\|\leqslant M_0\delta_i,\quad m_0\delta_i\leqslant\lambda_{ij}\leqslant M_0\delta_i,$$

$$f(y_j^i)\leqslant f(y_j^i+\lambda_{ij}a_j^i)+\varepsilon_i,$$

其中 $j=1, 2, \cdots, m$，又正常数 m_0、M_0 与 i 无关。

则 $\{x_k\}$ 称为定步长下山点列，$\{z_i\}(z_i=x_{k(i)})$ 称为主导点列，δ_i 称为 z_i 的控制步长，ε_i 称为 z_i 的控制误差，A^i 称为 z_i 的控制正基，$\{x_k | k(i)\leqslant k<k(i+1)\}$ 称为第 i 个下山子列。

定理 设 $\{x_k\}$ 为 R^n 上函数 $f(x)$ 的定步长下山点列，$\{z_i\}(z_i=x_{k(i)})$ 为其主导点列，$\{\delta_i\}$ 为其控制步长序列，$\{A^i\}$ 为控制正基序列，并设满足以下二个条件：

(a) $\{x_k\}$ 中每个下山子列是有限的，亦即主导点列 $\{z_i\}$ 是无限的。

(b) 控制正基 A^i 的生成测度 $m(A^i)$ 具有正下界，那末，成立以下收敛性质：

(c_1) 如 $f(x)$ 为连续可微函数，且 $\{x | f(x)\leqslant f(x_1)\}$ 为有界，则主导点列 $\{z_i\}$ 的任一极限点 x_* 满足 $\nabla f(x_*)=0$。

(c_2) 如 $f(x)$ 为连续可微的严格凸函数，且在 x_* 取得极小值，则整个点列 $\{x_k\}$ 收敛于 x_*。

(c_3) 如 $f(x)$ 为具有正定主部的二次函数，则存在与 i 无关的正常数 M，使成立

$$\|x_k-x_*\|\leqslant M(\delta_i+\varepsilon_i/\delta_i),$$

这里，$k(i)\leqslant k<k(i+1)$，$i=1, 2, 3, \cdots$。

定理 轴向搜索法，Hooke-Jeeves 方法及利用一个确定的正基对这些方法所作的简化方法，均具有上述收敛性质(c_1)～(c_3)。

四、单纯形调优法的收敛性质

我们验明，在适当的反映条件下，单纯形调优法属于定步长下山法，从而获得了它的收敛性质。

定义 （单纯形调优法，反映条件有二种）

设 $f(x)$ 为 R^n 上函数，算法步骤如下：

(a) 取初始单纯形 $S^1=(x_0^1, x_1^1, \cdots, x_n^1)$，$k:=1$。

(b) 将 S^k 的顶点适当排列，使 $S^k=(x_0^k, x_1^k, \cdots, x_n^k)$ 满足：

$$f(x_0^k)\leqslant f(x_1^k)\leqslant\cdots\leqslant f(x_n^k)。$$

这时，称 S^k 的顶点为自然排列的，x_0^k 称为 S^k 上好点，x_n^k 称为 S^k 上坏点。

(c) 记 x_c 为 S^k 上坏点 x_n^k 以外其余顶点的重心，x_r 为 x_n^k 关于 x_c 的反映点，即 $x_r=2x_c-x_n^k$，并记 S^k 由坏点 x_n^k 反映的单纯形为 S_r^k，S^k 向好点 x_0^k 紧缩的单纯形为 S_c^k，紧缩比为 $\theta(0<\theta<1)$。检验反映条件：

$$f(x_r)<f(x_n^k)-\theta^{2p(k)}\cdot\varepsilon_1 \tag{1}$$

其中 ε_1 为预定正数，$p(k)$ 为从 S^1 至 S^k 的紧缩次数，或者采用另一反映条件：

$$f(x_r)<f(x_c)<f(x_n^k)。 \tag{2}$$

如反映条件成立，令 $S^{k+1}:=S_r^k$，如反映条件不成立，令 $S^{k+1}:=S_c^k$。然后，$k:=k+1$，并转向步骤(b)。

由上述步骤所得的 $\{S^k\}(k=1, 2, 3, \cdots)$ 称为单纯形调优序列。

定理 设 $\{S^k\}(k=1, 2, 3, \cdots)$ 为 $f(x)$ 的单纯形调优序列，$S^k=(x_0^k, x_1^k, \cdots, x_n^k)$。

反映条件为(1)时，成立以下结论：

(c_1) 如 $f(x)$ 为连续可微函数，且 $D=\{x|f(x)\leqslant f(x_0^1)\}$ 为有界，则对于进行紧缩步骤的单纯形 S^k 的任何顶点组成的点列，其任何极限点 x_* 必满足 $\nabla f(x_*)=0$。

(c_2) 如 $f(x)$ 为连续可微的严格凸函数，在 x_* 取得极小值，则 S^k 的任何顶点组成的点列均收敛于 x_*。

(c_3) 如 $f(x)$ 为具有正定主部的二次函数，则存在正常数 M，使对 $j=0, 1, \cdots, n$，及一切 k，均成立

$$\|x_j^k-x_*\|\leqslant M\theta^{p(k)}\to 0 \quad (k\to\infty),$$

其中 θ 为紧缩比，$0<\theta<1$，$p(k)$ 为从 S^1 至 S^k 的紧缩步骤次数，$p(k)\to\infty$（当 $k\to\infty$）。

反映条件为(2)时，成立上述结论(c_2)，(c_3)。

证明的主要内容为：以单纯形各棱平方和的开方作为控制步长，以 $\theta^{2p(k)}\cdot\varepsilon_1$ 作为控制误差，以单纯形的路径正基作为控制正基，验明 $\{S^k\}$ 的好点序列为定步长下山点列，并论证紧缩步骤次数必为无限。

关于异侧对称策略的判别条件

上海交通大学　胡毓达

本文引入异侧对称策略的概念，得到了判别任一对称策略异侧对称次数的充分必要条件，讨论了异侧对称策略在对称范围的最优性。由此得到黄金分割法在任一有穷步具有异侧对称意义下的最优性。同时，根据给出的异侧对称不等式，可以判定任一近似黄金分割法从哪一步开始不具有最优性。

定义 1　对于[0, 1]上的单峰函数，设 u 为不小于 $n(\geqslant 2)$ 次的对称策略，x'_{n-1} 为它的第 $n-1$ 次丢掉试验点，$\bar{x}_n$ 为第 n 次留下试验点，x_{n+1} 为第 $n+1$ 个试验点。如果当 $\bar{x}_n<x'_{n-1}$ 时有 $x_{n+1}<\bar{x}_n$，当 $\bar{x}_n>x'_{n-1}$ 时有 $x_{n+1}>\bar{x}_n$，则称 u 具有第 $n-1$ 次异侧对称性。

定义 2　若策略 u 不具有第 1 次异侧对称性，则称 u 为 0 次异侧对称策略。若 u 具有第 1 次到第 $n(\geqslant 1)$ 次异侧对称性，则称 u 为不小于 n 次的异侧对称策略。若 u 具有第 1 次到第 n 次异侧对称性而不具有第 $n+1$ 次异侧对称性，则称 u 为 n 次异侧对称策略。若对于任意的 n，u 都具有第 1 次到第 n 次异侧对称性，则称 u 为任意次异侧对称策略。

用 S_n 记所有 n 次异侧对称策略的集合，$S_n^\uparrow$ 记所有不小于 n 次的异侧对称策略的集合。显然有 $S_n\subset S_n^\uparrow$ 及 $S_n^\uparrow\subset S_{n-1}^\uparrow$。

定义 3　设 $\mathfrak{F}$ 为 [0, 1] 上所有单峰函数的集合，u 为 n 次试验策略，$\delta_n(u, f)$ 为 u 关于 $f\in\mathfrak{F}$ 的第 n 次留下区间的长度，则称 $\delta_n(u)=\sup\limits_{f\in\mathfrak{F}}\delta_n(u, f)$ 为策略 u 的 n 次精度。若对于某一 $n(\geqslant 1)$ 有 $\delta_n(u)<\delta_n(v)$，则称在第 n 步策略 u 优于策略 v。

研究异侧对称策略的性质，得到判别任一对称策略异侧对称次数的充要条件如下。

定理 1　设 $x_1\left(>\frac{1}{2}\right)$ 是对称策略 u 的第 1 个试验点，则 $u\in S_{n-1}^\uparrow(n\geqslant 1)$ 的充要条件是

$$\frac{F_{n-1}}{F_n}\leqslant x_1\leqslant\frac{F_n}{F_{n+1}},\quad n\text{ 为}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{偶}}{\text{奇}}\text{数},\tag{1}$$

其中 $F_i(i=0, 1, \cdots)$ 是 Fibonacci 数。

定理 1 必要性的证明可分两种情形讨论。对于 $n=1$，(1)式显然成立。对于 $n\geqslant 2$，可先用数学归纳法证得策略 $u\in S_{n-2}^\uparrow$ 的 n 次精度公式为

$$\delta_n(u)=(-1)^{n-1}[F_{n-3}-F_{n-2}x_1]\tag{2}$$

（补充定义 $F_{-2}=1$，$F_{-1}=0$，此式对于 $n=1, 2, \cdots$ 成立）。另外，由 $u\in S_{n-1}^\uparrow(n\geqslant 2)$ 可得到

$$\frac{1}{2}<\frac{\delta_n(u)}{\delta_{n-1}(u)}<\frac{2}{3}\tag{3}$$

（证略）。据(2)和(3)得

$$\frac{1}{2}<\frac{(-1)^{n-1}[F_{n-3}-F_{n-2}x_1]}{(-1)^{n-2}[F_{n-4}-F_{n-3}x_1]}<\frac{2}{3}。\tag{4}$$

设 n 为偶数，从(4)式可以推得

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} < x_1 < \frac{F_n}{F_{n+1}}。 \tag{5}$$

设 n 为奇数，从(4)式可推得

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} > x_1 > \frac{F_n}{F_{n+1}}。 \tag{6}$$

(5)和(6)合起来就是(1)。

借助于下列不等式：

$$\frac{F_{i-3}}{F_{i-2}} \lessgtr \frac{F_{i-1}}{F_i}, \quad \frac{F_i}{F_{i+1}} \lessgtr \frac{F_{i-2}}{F_{i-1}}, \quad i\left(\geqslant \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)为\begin{matrix}偶\\奇\end{matrix}数,$$

再用数学归纳法，可以证明定理 1 的充分性。

我们把定理 1 中的(1)式称为异侧对称不等式，利用它可以由任一策略 u 的第 1 个试验点 x_1 来判定策略的异侧对称次数。

定理 2 设 u 和 v 都是不小于 $n(\geqslant 2)$ 次的对称策略。如果 $u \in S_{n-1}^{!}$, $v \in S_{n-2}$, 则

$$\delta_n(u) < \delta_n(v)$$

(证略)。

定理 2 告诉我们，在第 n 步，策略 $u \in S_{n-1}^{!}$ 优于策略 $v \in S_{n-2}$，我们把策略 $u \in S_{n-1}^{!}$ 的这种最优性，称为 u 在第 n 步具有异侧对称意义下的最优性。据定理 2，要使 u 在第 2 步具有最优性必需有 $u \in S_1^{!}$，若再要求它在第 3 步具有最优性又应有 $u \in S_2^{!}$，等等。由此，在试验次数不限定的情况下，要使策略 u 在任一步都具有某种最优性就要求 u 是一个任意次异侧对称策略。

由定理 1 可以得到，黄金分割法是唯一的任意次异侧对称策略，第 1 个试验点 x_1 满足异侧对称不等式(1)的近似黄金分割法 u 是不小于 $n-1$ 次的异侧对称策略，n 次 Fibonacci 分数法 $\left(它的第 1 个试验点是 x_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)$ 是一个 $n-2$ 次异侧对称策略。由定理 2 可知，它们在做有限次试验时都具有异侧对称意义下的最优性。

对于任一近似黄金分割法 u，我们可先据其第 1 个试验点 x_1 的位置，利用异侧对称不等式(1)来判定它的异侧对称次数。设已判定 $u \in S_{n-1}$，则因与策略 $v \in S_n^{!}$(由定理 1 知这种策略是存在的)比较有 $\delta_{n+1}(u) > \delta_{n+1}(v)$，因而知 u 从第 $n+1$ 步开始不具有最优性。例如，因"0.618"法的第 1 个试验点为 $x_1 = 0.618$，利用异侧对称不等式可判定"0.618"法 $\in S_9$，故"0.618"法在做 2 到 10 次试验时都具有异侧对称意义下的最优性，而由定理 2 可知它从第 11 步开始不具有最优性。又如，利用异侧对称不等式可判定"0.618034"法 $\in S_{16}$，故"0.618034"法在第 2 到 17 步都具有异侧对称意义下的最优性，而由定理 2 可知它从第 18 步开始不具有最优性等等。

参 考 文 献

[1] Kiefer, J., Sequential Minimax Search for a Maximum. Proc. Amer. Meth. Soc., 4(1953), 502～506.

[2] 华罗庚，优选法平话及其补充，国防工业出版社，(1971)。

[3] 洪加威，论黄金分割法的最优性，数学的实践与认识，2 (1973), 34～41。

用线性逼近法求解非线性管道网络问题的收敛性

上海师范学院　张建中

一般非线性管道网络的基本方程组为

$$(E1)\quad \begin{cases} AX=b \\ (A^T\tilde{A}^T)\begin{pmatrix} Y \\ U \end{pmatrix}=P, \end{cases}$$

其中 $A(m\times n)$ 及 $\tilde{A}(M\times n)$ 分别为收点与发点的关联矩阵，未知量是 $X=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 及 $Y=(y_1, \cdots, y_m)^T$，而 P 的各分量为

$$p_j=s_j|x_j|^{\sigma-1}x_j-w_j。\quad (j=1, \cdots, n)$$

上式中的非线性指数 $\sigma\in(0, 3)$。所有各量的实际意义可见[1]。特别对于单发点、无管段加压的情形(下称简单管网)，$(E1)$就简化为

$$(S1)\quad \begin{cases} AX=b \\ A^TY=(s_1|x_1|^{\sigma-1}x_1, \cdots, s_n|x_n|^{\sigma-1}x_n)^T。 \end{cases}$$

如果我们引进位势函数

$$f_2(X)=\frac{1}{\sigma+1}\sum_{j=1}^{n}s_j|x_j|^{\sigma+1},$$

$$f_1(X)=f_2(X)-U^T\tilde{A}X-W^TX,$$

则可将$(E1)$与$(S1)$分别写成

$$(E)\quad \begin{cases} AX=b \\ A^TY=\nabla f(X) \end{cases}$$

$(f=f_1$ 或者 $f_2)$。由 f_1 与 f_2 的严格凸性易知这两个方程组的解也就是严格凸规划问题

$$(P)\quad \min_{b-AX=0} f(X)$$

的最优解 X^* 及相应的 Lagrange 乘子向量 Y^*。

对简单管网方程组$(S1)$，前几年上海师大[1]与 Wood-Charles[2] 彼此独立地提出了一种逐次线性逼近法，即依次对 $k=1, 2, \cdots$ 解线性方程组

$$\begin{cases} AX=b \\ A^TY=\nabla f_2(X^k)+G_k(X-X^k), \end{cases}$$

其中

$$G_k=\frac{1}{\sigma}\nabla^2 f_2(X^k)$$

($\nabla^2 f_2$ 表示函数 f_2 的二阶偏导数矩阵)，得解$(\tilde{X}^k, Y^k)$。再令

$$X^{k+1}=X^k+\lambda_k(\tilde{X}^k-X^k),$$

λ_k 取 1 或 1/2。这样一直做到 $\tilde{X}^k=X^k$ 时，则得到简单管网问题的解 $(X^*, Y^*)=(X^k, Y^k)$。

由于这个方法非常简便有效，因而国内外对其评价甚好，并成为目前管网计算中使用得相当普遍的一个方法[3]。然而，不仅 Wood-Charles 当时(1972)曾声言他们无法证得该解法的收敛性，而且至今也未见到国外有理论证明的文献。最近王长钰[4]提出步长公式的两种修改形式，即取

$$(W_1)\qquad \lambda_k := \min_{\lambda>0} f[X^k + \lambda(\widetilde{X}^k - X^k)],$$

或者

$$(W_2)\qquad \lambda_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j |x_j^k|^{\sigma-1} (\widetilde{x}_j^k - x_j^k)^2}{\sigma \max\limits_{0<\lambda<1} \sum_{j=1}^{n} s_j |x_j^k + \lambda(\widetilde{x}_j^k - x_j^k)|^{\sigma-1} (\widetilde{x}_j^k - x_j^k)^2}, \quad (\sigma>1)$$

在这样的改动下证明了算法对简单管网$(S1)$的收敛性。

采用(W_1)需在无穷区间上作一维最优搜索，而(W_2)分母中的运算不易实现，因此还有必要加以改进。特别是为便于实际部门接受起见，需要研究更接近于原来的方法、仍对一切$\sigma>0$适用、程序简单而实效良好的算法。这就是本文的主要内容之一。易知G_k是半正定阵，这就启发我们对比较广泛的一类半正定矩阵B_k来论证收敛性，而将G_k作为其中的一个特例。由于实际碰到的几乎都是一般管网方程$(E1)$，而不是$(S1)$，因此我们统一地讨论当f是任一严格凸函数时规划(P)的收敛性，而且还进一步证明了当f是伪凸或一般非凸函数时的收敛性。

本文的基本假定为：矩阵A关于行满秩，函数$f\in C^1$，且关于初始点X^0的水平集紧致。可以证明这是任何管网问题都具备的条件。在这些条件下，我们对有界的、半正定、非零矩阵序列$\{B_k\}$，提出如下的算法：

算法

1° 取初始点$X^0\in S=\{X \mid AX=b\}$，置$k=0$。

2° 求线性方程组

$$(E2)\qquad \begin{cases} AX=b, \\ A^T Y = \nabla f(X^k) + B_k(X-X^k) \end{cases}$$

的一个解$(\widetilde{X}^k, Y^k)$。

3° 计算$\nabla f(X^k)^T(\widetilde{X}^k - X^k)$。若其为零，则计算结束(见定理 2.1)；否则按下列步长规则之一确定λ_k，令

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k(\widetilde{X}^k - X^k),$$

置$k=k+1$，再回到2°。

几个步长规则

(a) $\lambda_k := \min\limits_{0<\lambda<1} f(X^k + \lambda(\widetilde{X}^k - X^k))$。

(b) 依次计算

$$\nu_k = \max_{X\in[X^k, \widetilde{X}^k]} \nu(X), \tag{1}$$

$\nu(X)$为矩阵$\nabla^2 f(X)$的谱半径。

$$\bar{\lambda}_k = -\nabla f(X^k)^T(\widetilde{X}^k - X^k)/(\nu_k \|\widetilde{X}^k - X^k\|^2),$$

$$\lambda_k = \min\{1, \bar{\lambda}_k\}。$$

对管网问题，(1)式可明显地简化为:

$$\nu_k=\sigma \max_{1\leq j\leq n} \{s_j|x_j^k|^{\sigma-1},\ s_j|\tilde{x}_j^k|^{\sigma-1}\}。$$

(c) 先令 $\lambda=1$，取

$$X^k(\lambda)=X^k+\lambda(\hat{X}^k-X^k), \tag{2}$$

判别是否满足

$$f[X^k(\lambda)]-f(X^k)\leq\eta\lambda\nabla f(X^k)^T(\hat{X}^k-X^k) \tag{3}$$

$(0<\eta<1)$，如满足，即取 $\lambda_k=\lambda$，否则令 $\lambda\leftarrow\lambda/2$，再回到(2)式。

本文证得的一些主要结果如下:

定理 1 设$(\hat{X}^k, Y^k)$是$(E2)$的一组解，

1) 若 $\nabla f(X^k)^T(\hat{X}^k-X^k)=0$，则 X^k 及相应的乘子向量 $\bar{Y}^k=(A^T)^+\nabla f(X^k)$ 就是一般非凸规划(P)的稳定点。其中$(A^T)^+$为 A^T 的广义逆矩阵。

2) 否则，$\hat{X}^k-X^k$ 必是函数 f 在 X^k 点的一个下降的可行方向：$\nabla f(X^k)^T(\hat{X}^k-X^k)<0$。

定理 2 如 f 是伪凸函数，且 $\{\hat{X}^k\}$ 有界，则对上述任一步长规则，算法所得序列 $\{X^k\}$ 的任一极限点都是规划问题(P)的最优解。

根据这个一般性结果，对于特定的迭代矩阵序列，算法的收敛性可以归结为判定 $\{\hat{X}^k\}$ 的有界性，于是便得到

推论 1 如取 $B_k\equiv D$(任一正定常矩阵)，则 $\{X^k\}$ 的任一极限点都是伪凸规划(P)的最优解，或一般非凸规划(P)的稳定点。

推论 2 如 $B_k\equiv D$，则当取 $f=f_1$ 时，对任一步长规则，由算法所得点列 $\{(X^k, Y^k)\}$ 收敛于一般管网问题$(E1)$的解(X^*, Y^*)。

推论 3 如 $\sigma>1$，$B_k=G_k$，则当取 $f=f_2$ 时，对简单管网问题$(S1)$有和推论 2 相同的结论。

定理 3 设 $\{B_k\}$ 中有子列 $\{B_{k_l}\}$ 收敛于某正定阵 $\bar{B}$，则当使用步长规则(a)和(c)时，相应子列 $\{X^{k_l}\}$ 的任一极限点都是规划(P)的稳定点。

推论 在定理的条件下，若 $f(X)$ 是伪凸函数，则 $\{X^k\}$ 的任一极限点都是规划(P)的最优解。

定理 4 对管网问题$(E1)$和$(S1)$，若 $\{B_k\}$ 中至少有某子列 $B_{k_l}\to\bar{B}$(正定阵)，则当采用步长规则(b)时，对 $1<\sigma\leq3$，也必有

$$X^k\to X^* \quad (k\to\infty) \quad 及 \quad Y^{k_l}\to Y^* \quad (l\to\infty)。$$

后两个定理使我们在使用该算法时可对迭代矩阵序列 $\{B_k\}$ 采取周期性地重设的办法。

若 $f\in C^2$，并设子列 $\{X^{k_t}\}$ 收敛于 $\bar{X}$，则借助于一些引理，我们还可以估计该算法在这几种步长规则下的收敛速度:

定理 5 如果矩阵 $\nabla^2 f(\bar{X})$ 正定，且 $\{B_{k_t}\}$ 收敛于某正定阵 $\bar{B}$，则当使用步长规则(a)～(c)中任何一个时，算法都至少具有终端线性收敛的敛速。即存在 $t_0>0$，$\theta\in(0, 1)$ 及常数 c，使当 $t\geq t_0$ 后恒有

$$\|X^{k_t}-\bar{X}\|<c\theta^t。$$

推论 1 对 $\sigma>1$ 的管网问题，若任一管段上的流量皆不为零，则存在 $k_0>0$，当 $k\geq k_0$ 时恒有

$$\|X^k - X^*\| < c\theta^k, \quad \|Y^k - Y^*\| < c\theta^k。$$

推论 2 若矩阵 $\nabla^2 f(X)$ 在全空间 R^n 上正定，则对一切 $k \geqslant 0$ 皆有 $\|X^k - X^*\| < c\theta^k$，从而算法是严格地线性收敛的。

本文的算法曾用某些大型供水管网验算，从计算结果来看，以采用规则(c)效果最佳，而且发现这时实际所取的 λ 值大多是 1 或 1/2，只在非常接近精确解时才会出现更小的 λ。这与计算人员以往使用 W-C 方法所积累的实践经验基本相符。不同之处是本算法可利用上文中简单的判据式(3)及时地自动予以调整，既提高计算速度，又保证了算法的稳定性。

参 考 文 献

[1] 上海师范大学，线性代数——管道网络计算，(1974)。

[2] D. J. Wood and O. A. Charles, Hydraulic network analysis using linear theory, J. of the Hydraulics, Vol. 98 (1972), 1157~1172.

[3] R. W. Jeppson, Analysis of flow in pipe networks, (1976).

[4] 王长钰，非线性管道网络中线性逼近法的收敛性及推广，《应用数学学报》(待发表)。

(上接 6 页)

参 考 文 献

[1] 夏道行 关于非正常算子(II)《数学学报》21. N. 2. (1978)187。

[2] 夏道行 关于非正常算子(III)(已投稿)。

[3] 夏道行 $U_{(1)}$ 群整体规范量子力学中交换关系，《复旦学报》N. 2 (1978)。

[4] 夏道行 与不定度规有关的散射问题，《中国科学》(1975)165。

[5] 夏道行 关于带不定度规或带中间系统的散射问题，《数学学报》N. 1~2 (1976)。

[6] 夏道行 关于相似于等距算子的压缩算子(已投稿)。

[7] 夏道行 关于 C_0 类压缩算子(已投稿)。

[8] 夏道行 关于压缩算子的不变子空间(已投《复旦学报》)。

[9] 严绍宗 关于压缩算子半群的酉扩张《复旦学报》N. 4 (1977)。

[10] 严绍宗 不定尺度空间上酉算子(I)(已投《复旦学报》)。

[11] 严绍宗 不定尺度空间上酉算子(II)(已投《复旦学报》)。

[12] 严绍宗 不定尺度空间上酉算子(III)(已投《复旦学报》)。

[13] 严绍宗 关于算子的酉扩张(已投稿)。

[14] 舒五昌 不定尺度空间上的自伴算子谱分析(已投稿)。

[15] 夏经博 关于交换压缩算子半群的酉扩张。

[16] Foias, C., Sz.-Nagy, B., Harmonic Analysis of Operators on Hibert Space, North-Holland, Amsterdam (1970).

[17] Muhly, P. S., Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 117~121.

总体最优化及初始点估计的一个数论方法

上海师范学院　严仲德

总体最优化就是求总体极值[1]。目前求总极值的方法比较少，常用方法之一是随机投点或随机投点再区域逐步收缩。其成功的原因在于点的均匀分布，注意到它的均匀性只能在无限时达到，而实际计算中点数总是有限的(且计算机中用的是伪随机数)。

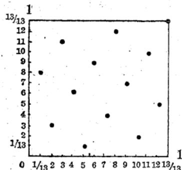


图 1

这里给出一个求总极值的新方法，一个直观模型。在 $\Omega=\prod_{1}^{s}[0,1]$ 上计算有限点时，用特定的数论上高度均匀的点阵代替随机投点，其均匀性更好。这点阵是运用了华罗庚、王元以及 Н. М. Коробов 在数值积分中的研究成果[2][3]，就是优佳格点 (Good lattice points) 或极值系数 (Optimal coefficients) 方法 (华-王方法、Коробов 方法)。

在这里移植运用到总体最优化中来，其高度均匀性见图 1 例。可将 p 个点张到 s 维空间而回避维数的"灾难"，点列形如 $\left(\left\{\frac{a_1t}{p}\right\},\left\{\frac{a_2t}{p}\right\},\cdots,\left\{\frac{a_st}{p}\right\}\right)\ t:1\to p$ ($\{\}$ 表示小数部分)在计算机上只需一句循环语句，而极值系数 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 需有已计算好的表可查。

按这类点阵上的数值积分，对函数类 $E_s^\alpha(C)$ (见[2])在积分意义下收敛的误差阶已经臻于至善了，就是对 $E_s^\alpha(C)$ 已是最(或接近最)均匀的了。

可将这种对某类函数最均匀的点阵称为"拟均匀分布点阵"，这样在一次优佳格点的投点中，按函数类(族)而言比同数目的随机投点更合理均匀(也比[4]中的观点深刻)。

已根据需要制作了 2～7 维部分常用素数的极值系数表，可供使用。(表中指出邻近点的关系，与 А. И. Сатыков 等人制作的表不同)华-王方法可由 Seymour Haber [3] 及其他人制作的表补充邻近点关系后就可用。而且随着这类点阵研究的进展，不断改善我们的方法。

由于每点具有 $\frac{1}{p}$ 测度的代表性(对边相贴成 s 维环面时)，可将所得数值按大小排列造一阶梯函数，对 s 维的 $f(X)$ 的值分布进行一维描述，这引入值分布函数 $D_p(x)$。

可有 Ω 上 $f(X)$ 的方向导致绝对值分布——起伏分布 $T_p(x)$ (见[5])。因可以明确定出邻近点，这样在计算 $f(X_i)$ 值时可与前已算出的邻近点比较，算出 $L_p=\frac{|f(X_i)-f(X_{k_i})|}{|X_i-X_{k_i}|}$ 是方向导数的一个抽样，造出方向导数绝对值统计分布 $T(x)$ 的经验分布函数 $T_p(x)$，运用"熵理论"[5]进行熵分析。这部分也是[5]的一种实践。用其邻域中熵积分的大小估价点的重要性。

把其邻域中熵大的点作为继续搜索的基础的有希望点集(也可简单地用值小的点集，但意义有所不同)。这些点是投点区域收缩的基础。

根据需要可实施多种渐进收缩的方法。

这里也给出了一个初始点估计的合理方法。初始点有时称初始解。单峰问题初始点的位置对能或迅速求得极值很有关系。对多峰问题则需把所有的峰求出来。若算了一个优佳格点阵后，把有希望点集中各点作为初始点，用局部最优化方法可迅速达到各局部极值点，加以比较就可有总极值。这样"混合"使用发挥各方面的长处，可迅速达到求总极值的目的。可编一个子程序装配到 SUMT 程序中去。

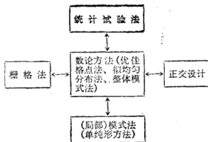


图 2

这优佳格点方法与其他方法有联系，使一些不同侧面的方法联成统一的认识图象。(1)作为随机投点的对立面，但又统一在均匀分布的根本上。(2)是一种整体模式法，是局部模式法(单纯形方法)的一种发展。(3)具有与正交设计类如的均匀分散性，但没有正交性。(4)是一种近乎栅格的形式，但又避免了维数增加时点数急剧增加的"灾难"。(图2)

这里实际上也给出了一个试验设计的新方法，对试验对象没有正交性要求，对数据进行处理，可有 $D_p(x)$、$T_p(x)$ 等对各试验点进行熵和权的分析。

参 考 文 献

[1] Dixon L. C., Szegö G. P. (eds): Towards Global Optimisation, (1975), 2 (1978).

[2] 华罗庚、王元，(1) 数值积分及其应用(1963)．(2) On numerical integration of periodic functions of several variables, Scientia Sinica 14 (1965)．(3) 数论在近似分析中的应用(1978)科学出版社。

[3] Zaremba S. K. (ed): Applicationis of Number Theory to Numerical Analysis (1972).

[4] Aird Thomas J. and Rice John R.: Systematic search in high dimensioned sets, SIAM Numer. Anal. Vol. 14, No. 2, April (1977).

[5] 严仲德，总体最优化的熵理论《自然杂志》12 (1979).

(上接75页)

参 考 文 献

[1] 徐建华等，自适应滤波(一)，(二)《复旦学报》，1976 年第 2 期，1977 年第 1 期。

[2] 719 地震勘探资料处理系统，1973 年。

[3] TQ-16 地震勘探资料处理系统，1978 年。

[4] 李贤平等，功率谱估计——相关函数法与 FFT 法，上海船舶运输科学研究所油印讲义，1972 年。

[5] 李贤平，一个频域处理系统，(未发表)。

在概率统计与计算机交界面上的一些工作

复旦大学　信息论教研组

1．概率统计是研究大量随机现象数量规律性的一门学科，它为从大量数据中正确而有效地提取信息提供了理论基础和众多的方法。而计算机的出现则为快速、准确、而又自动地进行大量数据处理、提取信息提供了物质基础。因此尽管概率统计和计算机科学有着各自的特点和内容，但在有效而正确地分析数据、提取信息这一目的上则是完全一致的，所以两者的互相渗透和结合是必然的，也一定会是富有成果的。

事实上，到目前为止，已在概率统计和计算机两者交界的领域中出现了许多重要的成就，特别是近十年来，已有一批人自觉地在这一交界面上工作。提出了"计算概率统计"与"计算机测量学"等新分支学科。

最近几年来，我组同志在解决工农业生产、国防建设和科学技术中所提出的实际问题的过程中，曾经在概率统计和计算机的交界面上做过一些粗浅的工作。

2．由于计算机的出现与日益普及，已对概率统计产生了越来越大的影响，特别是对于需要复杂计算的统计方法推动更大，计算机的出现使这些方法得以广泛的应用，并在应用中不断发展，时间序列分析及多元分析是这方面的突出例子。另外，由于计算机的存在，也促使人们致力于发展在计算机上能实现的新方法，著名的 Kalman 滤波及 Monte-Carlo 方法就是这方面的例子。最近几年来，我组同志在这方面做过一些工作，情况如下：

(1) Kalman 滤波和 Wiener 滤波。我组有些同志在与有关单位的协作中，于 1971 年把 Kalman 滤波方法用于火炮控制获得了成功；之后，他们又在这个基础上，针对由于系统机动性或突然变化而造成的系统状态变化不能精确满足通常状态方程的情况，利用 Kalman 滤波中新息序列的一些性质，来对系统的机动性进行检测，并提出了系统存在机动时滤波值的修正公式，得到了一种误差自适应的滤波和预测方法，并进行了成功的应用。后来，这个方法又在相控阵雷达的跟踪回路上再次获得了成功的结果[1]。

由于广大地球物理工作者的努力，已从 Wiener 滤波中演化出一种预测误差滤波-预测反折积，它对于消除海上地震资料由海水造成的鸣震有很好的效果。我组有些同志于 1974 年在 719 机上实现了上述算法，后由第一海洋地质调查大队的同志用于实际资料处理，证明有明显效果，现已成为常规处理手段[2]。

(2) 功率谱估计与快速傅里叶变换(FFT)算法。我们在 1972 年用 Blackman-Tukey 方法及 FFT 周期图法分别算出海浪谱[4]。后来又把功率谱估计这一工具用到下列各工程技术部门：地震勘探，空气轴承振动分析，飞机振动分析，天然地震速报。

此外，在 FFT 算法的基础上，我们于 1973 年在 719 机上实现了简单的频率域滤波，1977 年进一步在 TQ-16 机上实现了较为完整的频域处理系统，并包括了近年来有人提出的最大熵谱估计法(也称自回归谱估计法)[3]。

(3) 时间序列分析。1971～72 年，我们在研究上海市地下水位控制问题时，需要确定用、

灌水量，地下水位和地面沉降三者之间的定量关系。在解决这一问题中，我们把这三者看为时间序列，使用了有限参数模型拟合的方法，即对水量和水位拟合下列关系式：

$$H_{\text{本旬}}=a_0+a_1(Q_{\text{灌}}-Q_{\text{用}})+H_{\text{上旬末}},$$

其中 H，Q 分别表示水位和水量，由于这一公式能较好地拟合水量、水位时间序列，至今仍是有关单位制定每年用、灌水量的依据。

以后，在地震台网专用软件系统中，为了制定快速测定初动时刻的方法，我们对收到的信号采用了假设检验方法来检测是否有地震发生。为了求得检测用的统计量，对收到的噪声采用自回归模型拟合方法，并通过对过程的线性变换，使检验问题化为白噪声干扰下信号检测问题，得到的检验法比常用的方法更精确，能较好的检测微弱地震信号并确定初动时刻。

(4) Monte-Carlo 方法。Monte-Carlo 方法使概率统计学有可能运用更为复杂的数学模型来研究各种问题，而不必一定要局限在解析上可处理的模型。

我们用 Monte-Carlo 方法解决了如下随机面积分布问题：对平面上按某种概率分布散布的 N 个随机点，求出它们所张的面积。这是一个高度非线性问题，用解析方法来处理是极其困难的。

3．利用排队论的方法与结果来建立大型计算机系统的解析模型，并以此为基础对系统的性能进行定性甚至定量的分析，最近若干年来，已引起广泛的兴趣。这是概率统计与计算机科学关系中的另一个侧面。

近代计算机系统日趋复杂，不管是带有终端的交往式计算机，还是由多台计算机组成的计算机网络，或是由许多微处理器构成的平行处理系统，都存在着大量调度问题以及整个系统的性能评价和优化问题。在上述计算机系统中，由于用户对计算机的需求带有很大的随机性，加上计算机系统本身极为复杂，因此采用概率统计方法来作为分析它的工具是十分自然的。

我们是在给大型分时计算机 FD-753 作系统分析时开始了这方面的一些工作的特别是开展了对离散时间排队系统的一些理论研究和实际应用。

计算机都是按照一定节拍工作的，因此计算机中出现的排队系统自然大多是离散时间排队系统。用连续时间排队系统的结果作为它的近似，在不少场合带来较大的误差，这是要研究离散时间排队系统的理由之一。另一方面，对离散时间系统的研究经常导致一组差分方程。而这种方程完全可以借助于计算机来进行求解——这里真正做到了用计算机来研究计算机。

最近我们曾对一些最基本的离散时间排队系统进行基础研究。求得了有多类顾客场合的 $M|D|1$ 系统的平均队长和平均等待时间，还研究了 $M|M|C$ 系统与 $D|M|1$ 系统平衡态时的队长分布。此外，又专门讨论了一种带有某种封锁的排队模型。以后我们还利用上述带封锁的排队模型的结果分析了 FD-753 的多体交叉访问存贮器，得到了具体的数据，供设计时参考。另外，我们还用闭排队网络作为模型分析了 FD-753 机，求得了先行数栈中缓冲器个数与运算器忙碌概率的关系，提供了设计时的参考数据。

最近我们又提出了多体交叉访问存贮器的一个二维离散时间排队模型。（下转 73 页）

Cramér–Rao 不等式成立的充要条件

华东师范大学　郑伟安

关于 Cramér-Rao 不等式[以后简记为 C-R 不等式]已经讨论得很多了。从型式的扩展来看，有最初的 C-R 不等式[6]，有 K 阶 Bhattacharyya 不等式[3]，Chapman-Robbins 不等式[5]，以及 Kiefer 不等式[10]，等等。从不等式存在性的讨论来看，有用最小充分统计量来描述的[4]，也有用相关密度函数来描述的[7]，更有些文献中，把 C-R 不等式的"正则条件"的要求，不适当地省略了。关于这些情况，在[7]中已指出了。同时，在[7]中我们也看到，"正则"条件有时是能稍作放宽的(但该文是对估计量作了稍紧的限制后才放宽的)。然而，这就立刻产生了一个问题：如果去掉"正则条件"的限制，在对估计量 t 的一般理解下，C-R 不等式的适用范围究竟能扩充得多远？这一点，对于 C-R 不等式本质的认识来说，是具有一定意义的。

通过本文，我们将看到，在估计量的范围取为 $\mathscr{L}_2(\theta)$ 时，C-R 不等式成立的充要条件是所涉及到的概率分布族满足所谓"弱正则"条件。

在以下的讨论中，我们假定 $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ 为某个可测空间，$\{P_\delta\}$ 是定义于其上的一族概率，其中 δ 是参量，取值于实数轴上某区间 (a, b)，并以 $\mathscr{L}_2(\theta)$ 表示关于概率 $P_\theta(\theta\in(a, b))$ 为均方可积的，且仅取有限实数值的随机变量全体，按内积 $(x, y)_\theta=\int_\Omega xy\,dP_\theta$ 所形成的 Hilbert 空间。

为了以后讨论的需要，我们先注意一些泛函分析与测度论中的事实，并把它们写成引理的形式。

引理 1　对于 $\mathscr{L}_2(\theta)$ 上的线性泛函 $f(t)$，我们可以找到某个正数 M，使得对于一切 $t\in\mathscr{L}_2(\theta)$，有

$$\|t-E_\theta t\|_\theta\geqslant\frac{|f(t)|}{M} \tag{1}$$

的充要条件是：$f(t)$ 是 $\mathscr{L}_2(\theta)$ 上的有界线性泛函(即存在非负数 N，使对任何 $t\in\mathscr{L}_2(\theta)$，有不等式 $|f(t)|\leqslant N\|t\|_\theta$ 成立)，并且 $f(1)=0$。

系　在引理 1 中，如果 $f(t)\not\equiv0$，那末我们可找到 $V\in\mathscr{L}_2(\theta)$，使 $f(t)\equiv(V, t)_\theta$，并以 $M=\|V\|_\theta$ 代入(1)后，不等式仍成立；此时等号当且仅当 $t=kV$ 时达到。

引理 2　设有随机变量 x，如果它对于一切 $\mathscr{L}_2(\theta)$ 中的非负随机变量 t，有 $|E_\theta[t\cdot x]|<\infty$，则 $x\in\mathscr{L}_2(\theta)$。

引理 3　设 $\{\mu_n\}_{n=0,1,\cdots,N}$ (N 为有限数或 ∞) 是一族定义于 $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ 上的概率测度。则我们可找到集 $A\in\mathscr{A}$，使得有 $\mu_0[A^c]=0$，并且对于每个 n，μ_n 在 $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ 上产生两个测度 $\mu_n^{(1)}$ 与 $\mu_n^{(2)}$，使得

$$\mu_n=\mu_n^{(1)}+\mu_n^{(2)},\quad \mu_n^{(1)}[A^c]=\mu_n^{(2)}[A]=0,\quad (n\geqslant0)$$

$$\mu_n^{(1)}\ll\mu_0,\quad (\mu_0^{(1)}=\mu_0).$$

现在我们叙述 C-R 不等式成立的充要条件。为此先引进一个定义。

定义　设 $\{P_\delta\}$ 是 $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ 上一族如本文开始所述概率测度，则我们称 $\{P_\delta\}$ 在 θ 处是弱

正则的，是指对于每个 δ，如果我们把 P_δ 关于 P_θ 作如引理 3 的分解：

$$P_\delta=P_\delta^{(1)}+P_\delta^{(2)},\quad P_\theta[A_\delta^c]=P_\delta^{(1)}[A_\delta^c]=P_\delta^{(2)}[A_\delta]=0,$$

$P_\delta^{(1)}\ll P_\theta$, $(P_\theta^{(1)}=P_\theta)$，则有下述条件被满足：

（Ⅰ）Radon-Nikodym 导数 $q_\delta=\dfrac{dP_\delta^{(1)}}{dP_\theta}\in\mathscr{L}_2(\theta)$；

（Ⅱ）q_δ 在 θ 处存在弱导数，记为 q'_θ；

（Ⅲ）对于每个 $t\in\mathscr{L}_2(\theta)$，有 $E_\delta^{(2)}|t|<\infty$，并且

$$\left(\frac{\int|t|dP_\delta^{(2)}}{\delta-\theta}\right)\xrightarrow{\delta\to\theta}0$$

（显然，原来的"正则"条件[7]是上述定义的一个特例。）

定理 1 $\{P_\delta\}$ 在 θ 处为弱正则的充要条件是：对于一切 $t\in\mathscr{L}_2(\theta)$，$E_\delta[t]$ 及 $E'_\theta[t]$ 都存在且有限，并有

$$\|t-E_\theta[t]\|_\theta\geq\frac{|E'_\theta[t]|}{M}。$$

其中 M 表某正数。

进一步，我们可以找到 $V\in\mathscr{L}_2(\theta)$，使得 $(V,t)_\theta=E'_\theta[t]$，并且当 $E_\theta[t]\neq0$ 时，可以将 $M=\|V\|_\theta$ 代入上式，不等式仍成立。此时等号当且仅当 $t=kV$ 时达到。

引理 4 设 $\{P_\delta\}$ 在 θ 处弱正则，则对于每个固定的 δ，只能找到有限个可测集 $A_1,\cdots,A_m$；$P_\delta^{(2)}$（见引理 3）仅赋予这些集或与其相差零测度的其他集，以及它们的并集以正的概率。

在上述引理中出现的 $A_1,\cdots,A_m$，用测度论的术语来讲，就是 μ_δ-原子（参[8]）。此时我们特别称 $\mu_\delta^{(2)}$ 为纯有限原子的。

定理 2 在弱正则的定义中，条件(Ⅲ)与下述条件等价：(Ⅲ′)对于每个 δ，$P_\delta^{(2)}$ 都是纯有限原子的，并且存在 θ 的某个邻域 Δ 以及至多有限个（设是 N 个）不相交可测集 $B_1,\cdots,B_N$，使得对于一切 $\delta\in\Delta$，各个 B_i 都分别为 $P_\delta^{(2)}$-原子或 $P_\delta^{(2)}$-零集。并且除此之外再无其他原子；同时

$$\lim_{\delta\to\theta}\frac{\sum_{i=1}^{N}P_\delta(B_i)}{\delta-\theta}=0。$$

当参量为矢量 $\boldsymbol{\Theta}=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$ 时，我们有类似结果。先引进必要的符号与术语。

我们称 $\{P_\Theta\}$ 在点 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 处是弱正则的，是指对于任何不超过 n 的自然数 k，如果记 $\delta^{(k)}=(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1},\delta,\theta_{k+1},\cdots,\theta_n)$，则 $P_{\delta^{(k)}}$ 在 $\delta^{(k)}=\theta$ 处是弱正则的。

我们记 $t=(t_1,\cdots,t_r)$ 是任意的 r 维矢量，其分量 $t_i\in\mathscr{L}_2(\theta)$，

$$U=(u_{i,j});\quad u_{i,j}=E_\theta[(t_i-E_\theta[t_i])(t_j-E_\theta[t_j])]\quad i,\ j=1,\cdots,r。$$

设 s 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的某个子集 $\{n_1,\cdots,n_p\}$，并记

$$\Delta_s=(d_{i,k}^{(s)}),\quad d_{i,k}^{(s)}=E'_{\delta^{(k)}}(t_i)\big|_{\delta^{(k)}=\theta},\quad i=1,\cdots,r;\ k=n_1,\cdots,n_p。$$

而所谓 $\{P_\Theta\}$ 在 θ 处非退化，是指不存在不全为 0 的 n 个数 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，使得

$$\alpha_1[E'_{\delta^{(1)}}[t]|_{\delta^{(1)}=\theta}]+\cdots+\alpha_n[E'_{\delta^{(n)}}[t]|_{\delta^{(n)}=\theta}]=0$$

对任何 $t\in\mathscr{L}_2(\theta)$ 成立。

定理 3 设 $\{P_\Theta\}$ 在 θ 处非退化，则 $\{P_\theta\}$ 在此点为弱正则的充要条件是：对于任何 t，有 $E_{\delta^{(k)}}[t_i]$ 与 $E'_{\delta^{(k)}}[t_i]|_{\delta^{(k)}=\theta}$ 存在，并对 $\{1,\cdots,n\}$ 的任何子集 s，存在正定阵 V_s^{-1}，使得 $U-\Delta_sV_s^{-1}\Delta'_s$ 为非负定阵。（下转 84 页）

追加试验的最优设计

上海师范学院 周敬良　　武汉大学 张尧庭

1. 问　　题

在实际工作中，当做了一部分试验后，有时还需要追加一些试验，那么追加一些怎样的试验才是‘最优’的呢？有关这类问题，我们初步开始探索，得到一些结果，有些例子尚未算好，先提出以便交流。

假定已做了 n 次试验，得到的试验结果是 y，y 是 $n\times 1$ 的向量，参数是 θ，设计阵是 C，现在考虑线性模型

$$\begin{cases} E\underset{n\times 1}{(y)} = \underset{n\times k}{C}\ \underset{k\times 1}{\theta}, & rkC=k, \\ V(y) = \sigma^2 I_n。 \end{cases} \tag{1}$$

于是 $\hat{\theta}=(C'C)^{-1}C'y$, $V(\hat{\theta})=\sigma^2(C'C)^{-1}$。如果在进行了试验 C 之后，感到对 θ（或对某个 $\alpha'\theta$，或对某些 $A'\theta$）的精度还需提高，就希望追加做一些试验，设追加的试验为 $\underset{n\times k}{D}$，试验结果是 z，于是就有 $E\underset{m\times 1}{(z)}=\underset{m\times k}{D}\ \underset{k\times 1}{\theta}$, $V(z)=\sigma^2 I_m$。这样，实际上就是考察模型

$$\begin{cases} E\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}\theta, & rk\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=k, \\ V\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \sigma^2 I_{n+m}。 \end{cases} \tag{2}$$

现在的问题是 D 在某一范围 $\mathscr{D}$ 内应该怎样选取，才能使 θ（或 $\alpha'\theta$，或 $A'\theta$）的精度提高最快。这里所考虑的优良性准则还是文[1]中所提出的四种。

对模型(2)来说，θ 的估计量是 $(F'F)^{-1}F'\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$，为了与(1)给出的 $\hat{\theta}$ 相区别，我们用 $\hat{\theta}_N$ 来表示，因此有

$$\hat{\theta}_N=(C'C+D'D)^{-1}(C'y+D'z)=[I-(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D](C'C)^{-1}(C'y+D'z)$$

由于
$$(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}D'=I-(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1},$$

所以
$$\hat{\theta}_N=\hat{\theta}+(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}(z-D\hat{\theta})。$$

记 $\Delta\hat{\theta}=(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}(z-D\hat{\theta})$，则有 $\hat{\theta}_N=\hat{\theta}+\Delta\hat{\theta}$。而 $V(\hat{\theta}_N)=\sigma^2(C'C+D'D)^{-1}$。

2. 四种最优标准

考虑要改进估计的参数是 $\underset{l\times k}{A'}\ \underset{k\times 1}{\theta}$，$\underset{k\times l}{A}$ 是事先指定的常数阵，$rkA=l\leqslant k$，可以看出：(i)若 $l=1$，则 $A=\underset{k\times 1}{\alpha}$，$A'\theta=\alpha'\theta$，(ii)若 $A=I_k$，则 $A'\theta=\theta$。因此我们只考虑事先指定 $A'\theta$ 的情形。

由于 $\widehat{A'\theta}=A'\hat{\theta}$，因此 $V(\widehat{A'\theta_N})=\sigma^2A'(C'C+D'D)^{-1}A$。

设 $\mathscr{D}$ 是设计阵允许选择的集合，通常所谓的最优性有下列四种标准：

〈1〉 一致最优。即要求追加试验 D 满足

$$A'(C'C+D'D)^{-1}A\leqslant A'(C'C+D_*'D_*)^{-1}A \quad 对一切\ D_*\in\mathscr{D}$$

〈2〉 D-最优。即要求追加试验 D 使 $|A'(C'C+D'D)^{-1}A|$ 在 $\mathscr{D}$ 上达到最小值。

〈3〉 A-最优。即要求追加试验 D 使 $trA'(C'C+D'D)^{-1}A$ 在 $\mathscr{D}$ 上达到最小。

〈4〉 E-最优。即要求追加试验 D 使 $A'(C'C+D'D)^{-1}A$ 的最大特征根在 $\mathscr{D}$ 上达到最小。

由于矩阵 $\underset{p\times q}{X}\ \underset{q\times p}{Y}$ 与 $\underset{q\times p}{Y}\ \underset{p\times q}{X}$ 的非零特征根是全部相同的，因此〈2〉，〈3〉，〈4〉就分别等价于下列的〈2'〉，〈3'〉，〈4'〉。我们用 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_l$ 表示 $(C'C+D'D)^{-1}AA'$ 的非零特征根，于是

〈2'〉. $\prod_{i=1}^{l}\lambda_i$ 达到最小值；〈3'〉. $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i$ 达到最小值；〈4'〉. $\max_{1\leqslant i\leqslant l}\lambda_i$ 达到最小值。

因而问题就转化为矩阵 $(C'C+D'D)^{-1}AA'$ 的非零特征根与 $D'D$ 的关系（当 C 与 A 均给定后）。

3. $A=I_k$ 的情形

(i) 一致最优。很明显 $(C'C+D'D)^{-1}\leqslant(C'C+D_*'D_*)^{-1}\Leftrightarrow C'C+D'D\geqslant C'C+D_*'D_*\Leftrightarrow D_*'D_*\leqslant D'D$。这就告诉我们 D_* 的选取与 C 是无关的。这样就立刻可以由[1]得到如下所述的结论：

对已做了二水平正交表的试验，如果追加一个也是二水平的正交表试验，那么这种追加试验一定是一致最优的。

实际上，D 是 $\mathscr{D}$ 的一致最优追加设计的充要条件就是 D 是 $\mathscr{D}$ 的一致最优设计。因此，只要直接用[1]中有关一致最优的结果就可以了。

(ii) E-最优。$(C'C+D'D)^{-1}$ 的最大特征根就是 $(C'C+D'D)$ 的最小特征根的倒数，用 ν 表示 $C'C+D'D$ 的最小特征根，就得到：D 是 E-最优追加设计 $\Leftrightarrow\nu$ 最大。而

$$\nu=\inf_{x\neq0}\frac{x'(C'C+D'D)x}{x'x}=\inf_{x\neq0}\left[\frac{x'(C'C)x}{x'x}+\frac{x'(D'D)x}{x'x}\right]。$$

如果 $(C'C)$ 与 $(D'D)$ 是可交换的（例如当 $C'C=nI$ 时就是一个）。那么 $(C'C)$ 与 $(D'D)$ 可以同时对角化。记 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ 为 $C'C$ 的特征根，则 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k>0$，$D'D$ 的特征根记为 $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_k$，于是有 $\mu_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$。$C'C+D'D$ 的特征根可以表为：$\lambda_1+\mu_1$，$\lambda_2+\mu_2$，$\cdots$，$\lambda_k+\mu_k$。但要注意 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_k$ 不一定成立。因此 $C'C+D'D$ 的最小特征根也不是直接可以判断的。然而当 $C'C=nI$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k$。可以假定 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_k\geqslant0$，因此 $C'C+D'D$ 的最小特征根就是 $\lambda_1+\mu_k$，欲使 $\lambda_1+\mu_k$ 达到最大，充分而且必要的条件是 μ_k 达到最大。也即追加设计是 E-最优设计时，它一定就是对 nI 的 E-最优追加设计。

4. $l=1$ 的情形和 $l\neq1$ 的 A-最优问题

$l=1$ 时 $A=\alpha$，α 是给定的一个 $k\times1$ 的向量，所以

$$\begin{aligned}A'(C'C+D'D)^{-1}A&=\alpha'(C'C+D'D)^{-1}\alpha\\&=\alpha'(C'C)^{-1}\alpha-\alpha'(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}\alpha,\end{aligned}$$

它是 1×1 的矩阵。因而四种标准都要求 $\alpha'(C'C+D'D)^{-1}\alpha$ 的值达到最小，也即要求 $\alpha'(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}\alpha$ 达到最大值。

引理 1 设 $D(C'C)^{-1}D'$ 的特征根是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$; $g=D(C'C)^{-1}\alpha$, 则

$$\alpha'(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}\alpha\leqslant\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{1}{1+\lambda_i}\right)g'g。\tag{3}$$

证：因为 $D(C'C)^{-1}D'\geqslant0$, 于是存在正交阵 Γ 使得

$$\Gamma D(C'C)^{-1}D'\Gamma'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $D(C'C)^{-1}D'$ 的特征根，且 $\lambda_i\geqslant0$, $i=1, 2, \cdots, m$。不妨设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$, 于是记 $h'=g'\Gamma'=(h_1, h_2, \cdots, h_m)$ 后，有

$$\begin{aligned}&\alpha'(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}\alpha\\ &=g'\Gamma'\begin{pmatrix}(1+\lambda_1)^{-1} & & & 0\\ & (1+\lambda_2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (1+\lambda_m)^{-1}\end{pmatrix}\Gamma g\\ &=\sum_{i=1}^{m}(1+\lambda_i)^{-1}h_i^2\leqslant(1+\lambda_m)^{-1}g'g。\end{aligned}$$

系 1 在引理 1 的条件下，若 $trD(C'C)^{-1}D'$ 是一个常数 b, 则当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$ 时，(3) 中的不等式变成了等式，即

$$\begin{aligned}\alpha'(C'C)^{-1}D'(I+D(C'C)^{-1}D')^{-1}D(C'C)^{-1}\alpha&=\frac{m}{m+b}g'g\\ &=\frac{m}{m+b}\alpha'(C'C)^{-1}D'D(C'C)^{-1}\alpha,\end{aligned}$$

且设计阵 D 可以通过 $(C'C)^{-1}$ 的谱分解得到。

这是因为，当 $D(C'C)^{-1}D'$ 的特征根全相同时，

$$D(C'C)^{-1}D'=\frac{b}{m}I_m,\tag{4}$$

将设计阵 D 按行向量写出，即 $D'=(d_{(1)}, d_{(2)}, \cdots, d_{(m)})$, 等式(4)就是

$$d'_{(i)}(C'C)^{-1}d_{(j)}=\delta_{ij}\frac{b}{m}=\begin{cases}b/m; & i=j\\ 0; & i\neq j,\end{cases}$$

也即要求补充试验对原试验是'正交'的。

考虑 $C'C$ 的谱分解，即 $C'C=\sum_{i=1}^{k}\mu_i f_i f'_i$, 其中 μ_i 是 $C'C$ 的特征根，f_i 是 $C'C$ 相应于 μ_i 的特征向量。于是 $\mu_i>0$, $i=1, 2, \cdots, k$, 且

$$(C'C)^{-1}=\sum_{t=1}^{k}\mu_t^{-1}f_t f'_t。\tag{5}$$

当 $m\leqslant k$ 时，取

$$d_{(i)}=f_i\sqrt{\frac{b}{m}\mu_i}\tag{6}$$

易见 $$d'_{(i)}(C'C)^{-1}d_{(j)}=\sum_{t=1}^{k}\mu_t^{-1}\frac{b}{m}\sqrt{\mu_i\mu_j}\,f'_i f_t f'_t f_j=\begin{cases}b/m; & i=j\\ 0; & i\neq j。\end{cases}$$

于是满足(4)式的设计阵 D 可以通过(5)和(6)式得到。

利用引理 1，立即可得如下的定理：

定理 1 假设限定 D 的选取范围是

$$\mathscr{D}=\{D: trD(C'C)^{-1}D'=b,\ rkD(C'C)^{-1}D'=m\},$$

如果在 $\mathscr{D}$ 中存在 D_0 使得 $\alpha'(C'C)^{-1}D_0'D_0(C'C)^{-1}\alpha$ 达到最大值，而且 $D_0(C'C)^{-1}D_0'$ 的特征根全相同，则 D_0 就是 $\mathscr{D}$ 中的最优追加试验。

定理 2 假设限定 D 的选取范围是

$$\mathscr{D}=\{D: trD(C'C)^{-1}D'=b,\ rkD(C'C)^{-1}D'=m\},$$

如果在 $\mathscr{D}$ 中存在 D_0 使得对于每一个 i, $a_i'(C'C)^{-1}D_0'D_0(C'C)^{-1}a_i$ 达到最大值，且 $D_0(C'C)^{-1}D_0'$ 的特征根全相同，记 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_l)$，则 D_0 就是 $\mathscr{D}$ 中对于参数 $A'\theta$ 的 A-最优追加试验。

5. $m=1$ 及 $m\neq 1$ 情形

$m=1$ 时 D 是一个行向量，将 D 写成 d'。

(i) D-最优解。考虑 $A=I_k$，于是

$$|A'(C'C+dd')^{-1}A|=|C'C|^{-1}|I+dd'(C'C)^{-1}|^{-1},$$

因而，对 θ 的 D-最优一次追加试验应使 $|I+dd'(C'C)^{-1}|$ 达到最大，即使得 $1+d'(C'C)^{-1}d$ 达到最大，也就是要选取 d 使得：$d'(C'C)^{-1}d$ 达到最大。也即选 $\mathscr{D}$ 中的 d_0，使 d_0 与 $C'C$ 的最小特征根所相应的特征向量线性相关。

(ii) A-最优解。此时

$$(C'C+dd')^{-1}=(C'C)^{-1}-\frac{(C'C)^{-1}dd'(C'C)^{-1}}{1+d'(C'C)^{-1}d},$$

因此，当 $rkA=l$ 时

$$trA'(C'C+dd')^{-1}A=trA'(C'C)^{-1}A-\frac{d'(C'C)^{-1}AA'(C'C)^{-1}d}{1+d'(C'C)^{-1}d}。$$

要使 d 对 $A'\theta$ 是 $\mathscr{D}$ 中最优的，只需在 $\mathscr{D}$ 中选 d 使

$$h=\frac{d'(C'C)^{-1}AA'(C'C)^{-1}d}{1+d'(C'C)^{-1}d}$$

达到最大值。

考虑 $(C'C)^{-1}AA'(C'C)^{-1}\geqslant 0$, $(C'C)^{-1}>0$，因此存在非退化阵 P 使

$$(C'C)^{-1}=P'P,$$

$$(C'C)^{-1}AA'(C'C)^{-1}=P'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{pmatrix}P,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 $|(C'C)^{-1}AA'(C'C)^{-1}-\lambda(C'C)^{-1}|=0$ 之根，也就是 $A'(C'C)^{-1}A$ 的全部非零特征根再添上一部分零。于是(4)式就化为

$$h=\frac{d'P'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{pmatrix}Pd}{1+d'P'Pd},$$

令 $Pd=z$，就得

$$h=\frac{z'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{pmatrix}z}{1+z'z}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_k z_i^2}{1+\sum_{i=1}^{k}z_i^2}\leqslant\lambda_1\frac{z'z}{1+z'z}。$$

因此，当 $\mathscr{D}$ 限制为 $\mathscr{D}=\{d:d'(C'C)^{-1}d=b\}$ 时，$z'z=d'(C'C)^{-1}d=b$，且 $h\leqslant\lambda_1\frac{b}{1+b}$。因此有：

如果 $AA'(C'C)^{-1}$ 的最大特征根所相应的特征向量 d_0 属于 $\mathscr{D}$，则 d_0 就是 A–最优的追加试验。

如果 $A=I_k$，μ_1，q_1 是 $C'C$ 的最小特征根及其相应的特征向量，则 $d'(C'C)^{-2}d/(1+d'(C'C)^{-1}d)$ 在 $d'd=n$ 的条件下，在 $d=q_1$ 处有极大值 $n\mu_1(1+q_1'(C'C)^{-1}q_1)/(1+n\mu_1)$。

因此，对一般情况 $m\neq1$，可以考虑逐个添加的方式求出它的最优解。

6. 例

设 $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$\mathscr{D}=\{d:d'(C'C)^{-1}d=3,\ d_i=\pm1,\ i=1,\ 2,\ 3\}$ 其中 $d'=(d_1,d_2,d_3)$。待估参数为 θ。现求 A–最优追加设计 D。

$$(C'C)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad (C'C)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}。$$

容易求得 $(C'C)^{-1}$ 的特征根为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，1；相应的特征向量为 $(1,\ 1,\ 2)$，$(2,\ -1,\ 1)$，$(-1,\ -1,\ 1)$。故应取 $d'=(-1,\ -1,\ 1)$ 或 $(1,\ 1,\ -1)$。于是

$$\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad 或\quad \begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}。$$

参 考 文 献

[1] 李未，关于离散型试验的最优设计，《数学学报》1978 年第 4 期。

(上接 42 页)

参 考 文 献

[1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, ДАН СССР, т. 110, №1, (1956)7～10.
[2] Л. С. Понтрягин 等,«最佳过程的数学理论»,上海科学技术出版社, 1965 年。
[3] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press., Princeton, New-York, (1957).
[4] D. W. Bushaw, Stevens Institute of Technology Report 469, Hoboken, N. J., (1953).
[5] 钱学森,«工程控制论»,科学出版社, (1958).
[6] R. Bellman, I. Glicksberg, O. A. Gross, Quart. Appl. Math., Vol.13, (1955)321～324.
[7] J. P. Lasalle, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. 5, Princeton, (1960)1～24.
[8] Р. В. Гамкрелидзе, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, (1958)449～474.
[9] 宋健、韩京清,«数学进展»第 5 卷, (1962), 264～284.
[10] 李训经、谢惠民,«复旦学报»(自然科学版), 1964 年第 4 期。
[11] 李训经、谢惠民等,«数学论文集»复旦大学数学研究所, (1964), 95～111.
[12] Н. Н. Красовский, ПММ, т. 21, (1957)670～677.
[13] L. W. Neustadt, J. Math. Anal. & Appl., Vol. 3, (1961) 406～427.
[14] А. А. Аяпунов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 3, (1940) 465～478.
[15] F. M. Kirillova, SIAM J. Control, Vol. 5, Ser. A, (1967).
[16] Р. Габасов, Ф. Кириллова, Качественная теория оптимальных процессов, Изд.«Наука»,Москва, (1971).
[17] R. E. Kalman, Bol. Soc. Math. Mexicano, (1960) 102～119.
[18] А. М. Летов, А и Т, т. 21, (1960).
[19] 章仁为, А и Т, т. 22, № 10 (1961).
[20] R. E. Kalman, J. Basic Engineering, Vol. 86, (1963) 51～60.
[21] 李训经,关于线性二次最优控制的几个问题,未发表。
[22] 章仁为, А и Т, т. 23, № 2, (1962).
[23] A. Manitius, Control Theory and Topies in Functional Analysis, Vol. III. (1976) 43～178.
[24] D. W. Ross, I. Flugge-Lötz, SIAMJ. Control, Vol. 7 (1969) 607～623.
[25] 李训经,时滞系统最优调节器的设计,未发表.
[26] M. Athans, Automatica,. Vol. 7 (1971) 643～647.
[27] 李训经,«复旦学报»(自然科学版), 1978 年第 2 期, 38～48.
[28] 上海炼油厂电子计算机应用协作组,«应用数学学报» 1976 年第 2 期。

（上接77页）

参 考 文 献

[1] 南京大学数学天文系，《泛函分析》，第124页。

[2] E. W. Barankin, Locally best unbiased estimations, Ann. Math. Statist. Vol. 20 (1949) 477～501.

[3] A. Bhattacharyya, On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation., Sankhya, Vol. 8 (1946～1948), 1～14, 201～218, 315～328.

[4] C. R. Blyth and D. M. Roberts, On inequalities of Cramer-Rao type and admissibility, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1, (1972) 17～30.

[5] D. G. Chapman and H. Robbins, Minimum variance estimation without regularity assumptions, Ann. Math. Statist. Vol. 22 (1950) 581～586.

[6] R. Cramér, Mathematical Methods of Statistcs, (1946).

[7] V. Fabian and Jame Hannan On the Cramér-Rao inequality, Ann. Statist. Vol. 5, No. I (1977) 197～205.

[8] P. R. Halmos, Measure Theory (1950), 134, 168.

[9] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, (1957).

[10] J. Kiefer, On minimum variance estimates, Ann. Math. Statist. Vol. 23 (1952), 627～629.

[11] C. R. Rao, Linear Statistical Inference and Its Applications, 2nd. ed. (1973) 326～327.

上海市数学会1978年年会论文报告目录

微分几何，数学物理，拓扑学

计算几何的兴起

复旦大学 苏步青

规范场的数学结构

复旦大学 谷超豪

球对称规范场

复旦大学 胡和生

关于 Monge-A'mpère 算子的一些性质

复旦大学 沈纯理

论一类样条曲线的等价值

复旦大学 刘鼎元

Yoneda 范畴与线性拓扑空间

复旦大学 肖尔健

代 数

非结合非分配的环

复旦大学 许永华

chevolleg 群的进展

华东师范大学 曹锡华

与线性变换完全环同构的环

复旦大学 许永华

关于 Weyl 群的 W_a 元素

华东师范大学 丘 森

由根格 Ny 作根系 Φ 的讨论

华东师范大学 刘昌坤

那些图有特征值零

华东师范大学 洪 渊

关于结合环的极大条件与极小条件的关系问题

复旦大学 许永华

分子轨道的图形理论中一个等式成立的条件

上海群益机械厂 刘为民

泛函分析、函数论

泛函积分及其应用

复旦大学 夏道行

近廿多年来函数几何理论的某些新发展

复旦大学 任福尧 何成奇

非标准分析发展

华东师范大学 程其襄

线性算子理论的若干问题

复旦大学 夏道行 严绍宗

不定尺度空间中算子的谱分解

复旦大学 舒五昌

拟不变变换群的拓扑和无限维李群

复旦大学 杨亚立

关于 $L^p(0, 1)$ 和一类奥尔里空间的测度

华东师范大学 吴良森

关于拟解析函数

华东师范大学 张奠宙

多项式的周期与广义周期

上海交通大学 沐定尧

抽象调和分析中的乘子

复旦大学 欧阳光中 郭毓驹

关于样条函数

复旦大学 陈天平

单叶函数的系数估计和不等式

复旦大学 任福尧

一个解析函数族的极值问题与在纯相位滤波中最小能量延迟原理

复旦大学 何成奇

Crunsky 不等式对系数估计问题的应用

复旦大学 张锦豪

关于同号函数的三角级数

复旦大学 陈天平

广义函数空间正上的乘子

复旦大学 欧阳光中

概 率 论

混料试验设计与D最优设计

华东师范大学 魏宗舒

时间序列分析方法的一些应用

复旦大学 汪嘉岗

关于概率论在计算机科学中的应用

复旦大学 吴立德 李贤平

关于首次跑出时刻可测性的进一步研究

上海纺织工学院 吴让泉

系统的可靠性计算

上海铁道学院 史定华

用二个次序统计量作极值分布参数的区间估计

上海师范学院 费鹤良

关于平稳高斯过程谱函数估计的渐近性质

复旦大学 徐业基

计算机系统的解析模型与离散排列系统

复旦大学 李贤平

最小约束法

华东师范大学 林举干

丁-散度及其收敛性

华东师范大学 汪振鹏

关于阴茈周期的周期图极大估计

复旦大学 汪嘉岗

自适应滤波

复旦大学 徐建华

二项分布流及其排队问题

复旦大学 郑祖康

追加试验的最优设计

上海师范学院 周发良 张尧庭

用二个次序统计量作极值分布的参数估计

华东师范大学 茆诗松
上海师范学院 丁 元

Cramér-Rao不等式成立的一个充要条件

华东师范大学 郑伟安

概率论在量子力学物理基础中的一些应用

中国科学院上海原子核研究所 陶宗英

偏微分方程，常微分方程

抽象空间微分方程的若干问题

复旦大学 金福临

二阶椭圆型方程组的广义解和某些边值问题

复旦大学 李明忠

多元混合型偏微分方程边值问题和计算方法

复旦大学 谷超豪

关于拟线性双曲型方程组的边值问题

复旦大学 李大潜 俞文鮆

一阶线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯特问题

复旦大学 李明忠

与实际应用有关的一些偏微分方程问题

复旦大学 陈恕行

一类含奇线的二阶椭圆方程组的广义黎曼-希尔伯特边值问题

复旦大学 侯宗义

自反馈静压轴承系统的全局稳定性

北京工业大学 邓乃扬
上海师范学院 沈家骐

常微分方程的一些新的可积类型

上海铁道学院 李鸿祥

一阶椭圆型方程组的黎曼-哈斯曼边值问题的奇异情形

复旦大学 侯宗义

高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动及其应用

复旦大学　江福汝　高汝熹

一类高阶非线性椭圆方程的边值问题

复旦大学　侯宗义

奇摄动方法在生物化学中应用

华东师范大学　陈美廉

控 制 理 论

控制方程的解析设计

复旦大学　李训经

关于最优控制理论和计算机控制的几个问题

复旦大学　李训经

关于随机控制的动态规划方法

上海交通大学　程极太

关于系统辨识的一些问题

华东师范大学　袁震东

关于上海炼油厂计算机控制的数学模型问题

复旦大学　李训经

线性时变系统 L_2 稳定性判据

华东师范学院　张仁生

线性控制系统一般理论的几个基本问题

华东师范大学　郑毓蕃

随机信号源检测和参数识别

复旦大学　唐国兴

用计算机分析心电图的一种方法

复旦大学　罗振东

传递函数拟合及其有关问题

华东师范大学　毛羽辉

线性多变量系统第 II 类规范型的演化

华东师范大学　郑毓蕃

应用现代控制论方法建立的二个数学模型

华东师范大学控制论组

计 算 数 学

流体力学问题的差分解

上海科技大学　郭本瑜

大型稀疏矩阵的特征值问题

复旦大学　曹志浩

无穷空间问题的数值解法及其在酶反应理论研究中的应用

上海计算技术研究所　李子才

关于液相快速反应体系中结合反应速率的研究

上海计算技术究研所　李子才

中国科学院上海生物化学研究所　周国城

关于轴对称弹性力学问题有限元素法的误差界限

复旦大学　蒋尔雄

矩阵病态条件的一种新度量

上海师范学院　匡蛟勋

大气环流的数值计算

上海科学技术大学　郭本瑜

光激核聚爆的计算

上海科学技术大学　潘仲雄

抛物型方程的强极值原理及其应用

上海计算技术研究所　李子才

稀疏线性方程组的解法-现状和技巧

上海计算技术研究所　郑家栋　华伯浩

具有小支流河边中不稳定流的计算

上海计算技术研究所　李子才

矩阵的 Jordan 标准形的变换矩阵的计算方法

复旦大学　蒋尔雄

稀疏对称高斯消去法的二个算法

上海计算技术研究所　郑家栋

关于无穷区域的近似解法

上海计算技术研究所　李子才

气态轴承压力的数值计算-求解非线性 Reynolde 方程的有限元法及其误差估计

上海计算技术研究所　戴　锷

飞机结构强度计算和讨论

上海计算技术研究所　华春光

运筹学

关于非线性规划中直接搜索法的理论

复旦大学　俞文魮

一个求总极值的方法及其应用

上海科学技术大学　郑　权

关于广义逆阵的一些理论应用计算

上海师范学院　王国荣

总体最优化的熵理论

上海师范学院　严仲德

约束最优化问题的一种直接搜索法

复旦大学　俞文魮

复旦大学　李元熹

飞行计划编制问题

复旦大学　俞文魮　陈开明

论异侧对称策略的最优性

上海交通大学　胡毓达

线性规划问题的一种几何图形解法

上海交通大学　桂祖华

总体最优化及初始点估计的一个数论方法

上海师范学院　严仲德

多发点非线性管道网络的一个超线性收敛性解法

上海师范学院　张建中　沈明刚

用纯化数法求解二次型的极值

上海交通大学　曹敬谦

上海市"工业年报"数据库介绍

上海计算技术研究所　叶　灏　乐淑珍

极小树和割集

复旦大学　俞文魮　魏国华

综合约束双下降法

上海交通大学　胡毓达

用线性逼近法求解非线性管道网络问题的收敛性

上海师范学院　张建中

带不等式约束的数学规划的总极值问题

上海科学技术大学　郑　权　张连生

关于凸集上凸函数极值的几个问题

上海科学技术大学　郑　权　周前光

带权有向图总回流量最小的节点排列问题

上海化工学院　俞仲铭

铁路运输网技术直达列车最优方案

上海铁路局研究所　芮惟铭

计算机科学数学理论

1001 磁盘操作系统

1932 研究所　徐仁茂

905 甲机操作系统

1932 研究所　云德华

模糊三段论与模糊归纳推理

上海铁道学院　楼世博　金晓龙

畸变、模糊图象的恢复与增强之递推算法

复旦大学　徐建华

时频相适应通讯系统模拟

1932 研究所　方德华　骆正彬

中学数学教学

从 1978 年高考数学试卷分析看如何提高中学数学质量

陶臣铨　毛宏德　汪天中

从数学竞赛看提高中学数学质量

上海中学　唐秀颖

怎样教好"排列组合"

华东师范大学　余元希